Math93.com

Arithmétique

Troisième

I Rappel : Division euclidienne

Définition 1 (Les entiers naturels)

Un nombre **entier naturel** est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\}$$

Définition 2 (Division Euclidienne)

Effectuer une **division euclidienne** d'un entier a par un entier b non nul ($b \neq 0$), c'est trouver deux nombres entiers, le quotient q et le reste r , tels que :

$$\boxed{a = b \times q + r} \text{ , avec } \quad r < b.$$

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 185 & 7 \\ -\,14 & 26 \\ \hline 45 & \\ -\,42 & \\ \hline 3 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 185 = 7 \times 26 + 3$$

Dans la division euclidienne de a par b, on a :

$$\begin{cases} \text{quotient : } \ q = 26 \\ \text{reste : } \ r = 5 < 7 \end{cases}$$

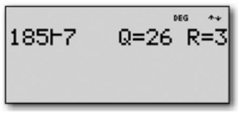
Avec la calculatrice

• Casio fx–92 Spéciale Collège

185 ⊢ 7 EXE

• TI-Collège Plus :

185 2nde ÷ 7 entrer



II Rappels : Multiples et diviseurs

Définition 3 (Multiple et diviseur)

- Un nombre entier $\boldsymbol{a}$ **est un multiple** de b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que $\boldsymbol{b}$ **est un diviseur de** $\boldsymbol{a}$ ou que a est divisible par b.
- Si l'entier b divise l'entier a il existe donc un entier q tel que : $a = b \times q$.

Exemple : L'entier $a = 15$ est un multiple de $b = 3$ car $15 = 3 \times 5$. Les entiers 3 et 5 sont donc des diviseurs de 15.

Propriété 1 (Critères de divisibilité)

- Un entier est **divisible par 2** quand il est pair donc quand son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un entier est **divisible par 3** quand la somme de ses chiffres est divisible par 3.
  Par exemple 114 est divisible par 3 car $1 + 1 + 4 = 6$ et 6 est divisible par 3.
- Un entier est **divisible par 4** quand le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- Un entier est **divisible par 5** quand son chiffre des unités est 0 ou 5. Par exemple 110 est divisible par 5.
- Un entier est **divisible par 9** quand la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un entier est **divisible par 10** quand son chiffre des unités est 0. Par exemple 110 est divisible par 10.

III Nombres premiers

▷ Activité 1.1 page 131 (Transmath Cycle 4)

Définition 4 (Nombres premiers)

Un **nombre premier** est un nombre qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples

Liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

▷ Exercices 7 à 12 p 134 + 25 à 32 p 135 (Transmath Cycle 4)

IV Décomposition en facteurs premiers

▷ Activité 1.2 page 131 (Transmath Cycle 4)

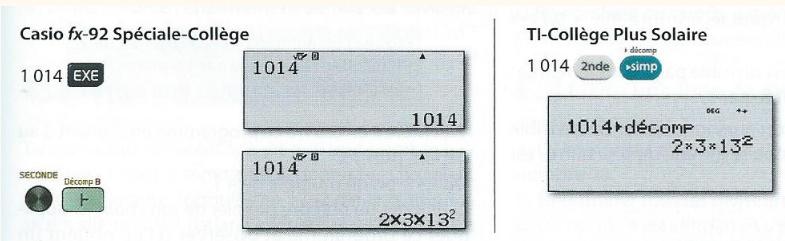
Propriété 2 (Admis)

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple

$$1\,014 = 2 \times 507$$
$$1\,014 = 2 \times (3 \times 169)$$
$$1\,014 = 2 \times 3 \times (13 \times 13)$$

$$\boxed{1\,014 = 2 \times 3 \times 13^2}$$



▷ Exercices 41 à 53 page 136 (Transmath Cycle 4)

V Fractions irréductibles

Définition 5 (Fractions irréductibles)

Une fraction est dite **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple

Pour rendre irréductible une fraction, on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{1\,014}{84} &= \frac{2\times3\times13^2}{2^2\times3\times7}\\ &= \frac{2\times3\times13^2}{2\times2\times3\times7}\\ &= \frac{13^2}{2\times7}\\ \frac{1\,014}{84} &= \frac{169}{14}\end{aligned}$$

Donc on obtient la fraction sous forme irréductible :

$$\boxed{\frac{1\,014}{84}=\frac{169}{14}}$$

Exercice 1

(Correction) De la même façon, donner la forme irréductible de la fraction suivante en détaillant tous les calculs :

$$\begin{aligned}\frac{245}{525} &= \frac{5\times7^2}{3\times5^2\times7}\\ &= \frac{7}{3\times5}\\ &= \frac{7}{15}\end{aligned}$$

▷ Exercices 54 à 64 page 137 (Transmath Cycle 4)

VI Applications de la décomposition

VI.1 Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD, gcd en anglais)

Méthode 1 (PGCD)

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On recherche les facteurs communs des deux entiers (on les entoure par exemple) .
3. On calcule alors le produit des facteurs communs.

Pour résumer, le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b.

Exemple

Exemple : Calcul du Plus Grand Commun Diviseur de 126 et 180.

$$\begin{cases} 180 &= \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 5 \\ 126 &= \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 &= \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 2 \times 5 \\ 126 &= \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 &= \boxed{18} \times 10 \\ 126 &= \boxed{18} \times 7 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 180 et 127 est donc 18.

Exercice 2

Calculons le Plus Grand Commun Diviseur de 150 et 120.

$$\begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\ 120 = 2 \times 3 \times 5 \times 2^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 150 = 30 \times 5 \\ 120 = 30 \times 4 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 150 et 120 est donc 30.

VI.2 Calculer le Plus Petit Multiple Commun de deux entiers (PPCM ou lcd, Least common multiple en anglais)

Méthode 2 (PPCM)

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On met en évidence les facteurs communs (donc le PGCD) et on complète les décompositions par les facteurs qui manquent pour obtenir des produit égaux.
3. On calcule alors ce multiple commun.

Pour résumer, le PPCM de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b .
Le PPCM est le produit du PGCD par le reste des facteurs non communs.

Exemple

Exemple : Calcul du Plus Petit Multiple Commun de 126 et 180.
On va exhiber les entiers N et P tels que :

$$180 \times N = 126 \times P = \text{PPCM de } 126 \text{ et } 180$$

Il est souvent plus facile de trouver le PPCM quand on a le PGCD.

$$\begin{cases} 180 & = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 & = 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 & = \boxed{18} \times 10 \\ 126 & = \boxed{18} \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 \times 7 & = \underbrace{\left(18 \times 10\right)}_{180} \times 7 \\ 126 \times 10 & = \underbrace{\left(18 \times 7\right)}_{126} \times 10 \end{cases}$$

$$\boxed{PPCM(180\ ;\ 126) = \underbrace{18}_{PGCD} \times 10 \times 7 = 1\,260} \quad \text{et} \quad \boxed{180 \times 7 = 1\,260 = 126 \times 10}$$

Exercice 3

Calculons le **Plus Petit Multiple Commun** des entiers 180 et 127 est donc 1 260.
On a vu que :

$$\begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\ 120 = 2 \times 3 \times 5 \times 2^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 150 = 30 \times 5 \\ 120 = 30 \times 4 \end{cases}$$

$$\boxed{PPCM(150\ ;\ 120) = \underbrace{\boxed{30}}_{PGCD} \times 5 \times 4 = 600} \quad \text{et} \quad \boxed{150 \times 5 = 600 = 120 \times 5}$$

Le **Plus Petit Multiple Commun** des entiers 150 et 120 est donc 600.

Propriété 3 (Une remarque utile)

Le produit de deux entiers naturels a et b est égal au produit de leur PGCD et PPCM.

$$PGCD(a\ ;\ b) \times PPCM(a\ ;\ b) = a \times b$$

Compléments : Liste des diviseurs d'un entier

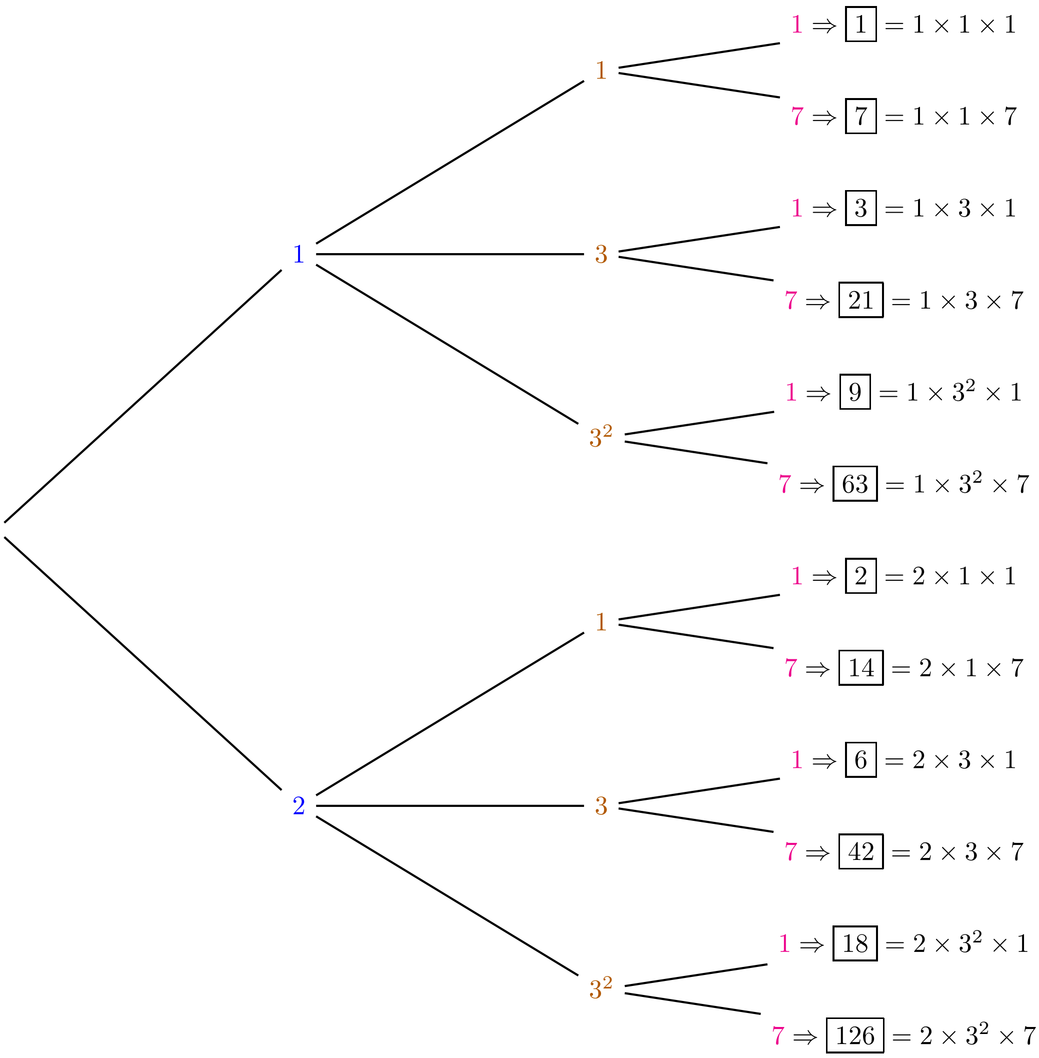
Lister tous les diviseurs d'un entier

Méthode 3

1. On écrit la décomposition de l'entier en facteurs premiers.
2. On complète un arbre présentant toutes les puissances des facteurs premiers.
3. On effectue le produit de chaque branche.

Exemples : Calcul des diviseurs de 126.

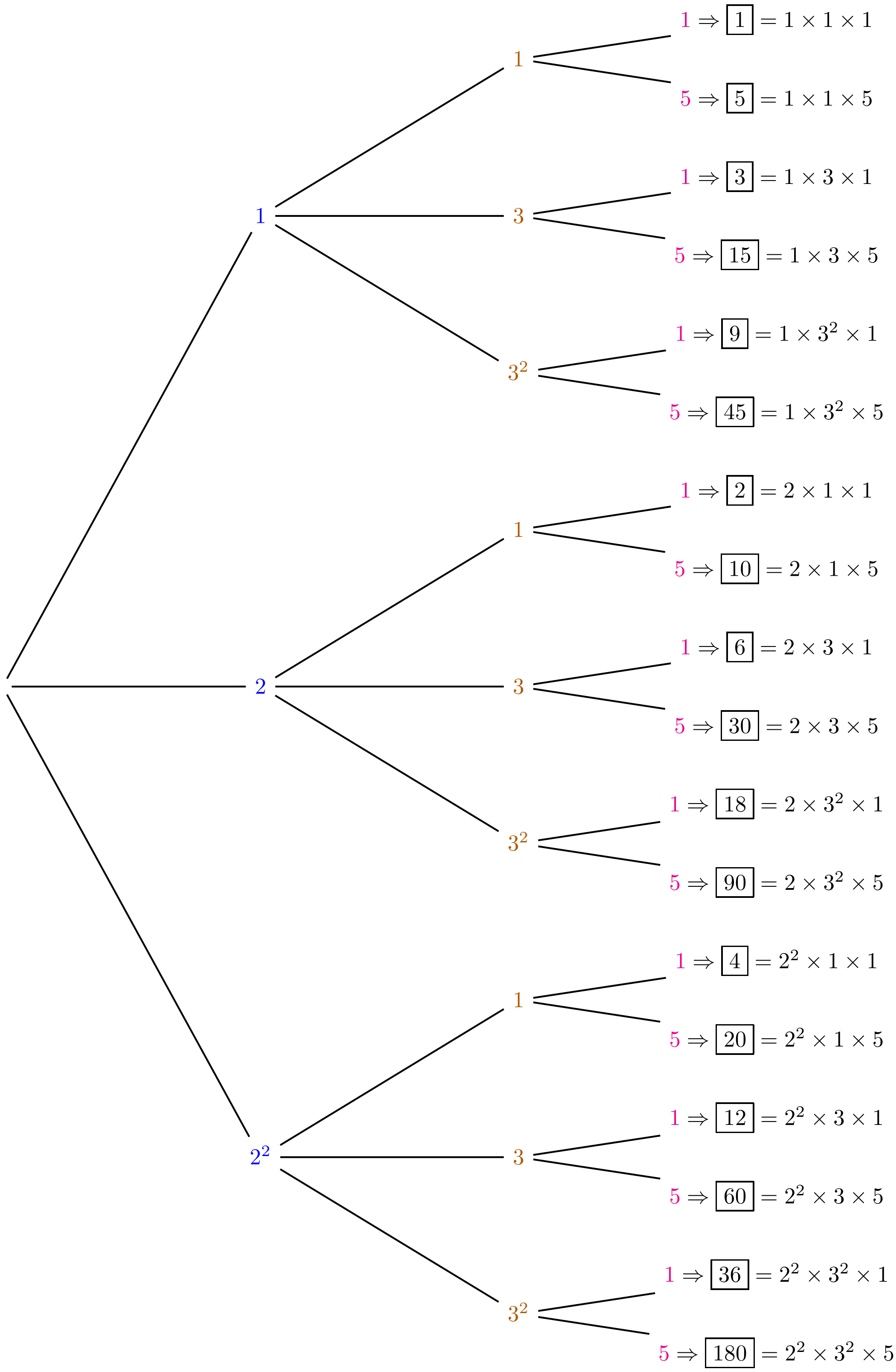
$$\boxed{126 = 2 \times 3^2 \times 7}$$



Les diviseurs de 126 sont donc : $1, 7, 3, 21, 9, 63, 2, 14, 6, 42, 18$ et 126

Lister tous les diviseurs de 180

$$\boxed{180 = 2^2 \times 3^2 \times 5}$$



Les diviseurs de 180 sont donc : $1, 5, 3, 15, 9, 45, 2, 10, 6, 30, 18, 90, 4, 20, 12, 60, 36$ et 180

↫ **Fin du cours** ↬