Math93.com

Fonctions Affines

Troisième

Dans tout ce qui suit, m et p désignent des nombres réels.

Remarque
Pour avoir les termes en anglais : www.math93.com

I. Définitions et exemples

I.1 Définition

Définition 1 (Fonction affine)

Une **fonction affine** f est une fonction :

$$f \ : \ x \longmapsto f(x) = mx + p$$

- Le coefficient $\boldsymbol{m}$ est le coefficient directeur (*slope*) ;
- La constante $\boldsymbol{p}$ est l'ordonnée à l'origine (*y-intercept*) ;

Cas particuliers : si $p = 0$, la fonction $x \mapsto mx$ est dite **linéaire** et si $m = 0$ elle est constante.

I.2 Exemples

- La fonction $x \longmapsto 2x - 8$ est affine car de la forme $x \longmapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = 2 \\ p = -8 \end{cases}$$

- La fonction $x \longmapsto x + \dfrac{1}{2}$ est affine car de la forme $x \longmapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = 1 \\ p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{3} - \pi$ est affine car de la forme $x \longmapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ p = -\pi \end{cases}$$

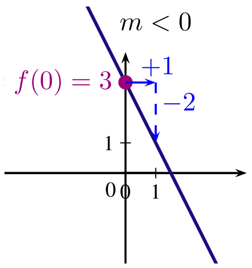
II. Représentation graphique

II.1 Propriété

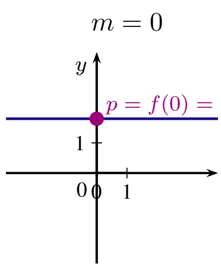
Propriété 1

On se place dans un repère du plan. On considère f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

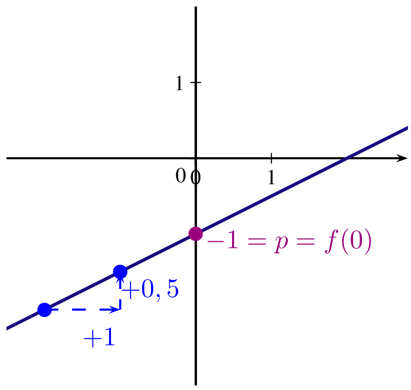
- La courbe représentative de cette fonction affine est une droite constituée de tous les points de coordonnées $(x \ ; \ mx + p)$.
- La courbe représentative de cette fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.
- L'ordonnée à l'origine p se lit facilement sur l'axe (Oy). C'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de cet axe. C'est l'image de 0 par f puisque $f(0) = p$.
- Cas particulier : la droite représentant graphiquement une fonction linéaire passe par l'origine du repère.



$x \longrightarrow f(x) = -2x + 3$



$x \longrightarrow f(x) = 1,5$



$x \longrightarrow f(x) = 0,5x - 1$

II.2 Proportionnalité des accroissements

Théorème 1

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels x_A et x_B, on a :

$$\boxed{f(x_B) - f(x_A) = m(x_B - x_A)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(x_A\ ;\ f(x_A)) & \text{ou}\quad A(x_A\ ;\ y_A) \\ B(x_B\ ;\ f(x_B)) & \text{ou}\quad A(x_B\ ;\ y_B) \end{cases}$$

Si x_A et x_B sont distincts :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}}$$

Mémo :

$$\boxed{\text{coeff. directeur} = m = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x} = \frac{\text{écart des } f(x)}{\text{écart des } x}}$$

Application 1 : déterminer par le calcul une fonction affine (il faut deux valeurs).

Déterminer la fonction affine f telle que $\begin{cases} f(-6) = 5 \\ f(3) = -1 \end{cases}$ OU dont la courbe est une droite passant par : $\begin{cases} A(-6\ ;\ 5) \\ B(\ 3\ ;\ -1) \end{cases}$.

Méthode

- f est une fonction affine d'où pour tout réel x, $f(x) = mx + p$.
- D'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$m = \frac{f(3) - f(-6)}{3 - (-6)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{Soit} \qquad m = \frac{-1-5}{3+6} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi,

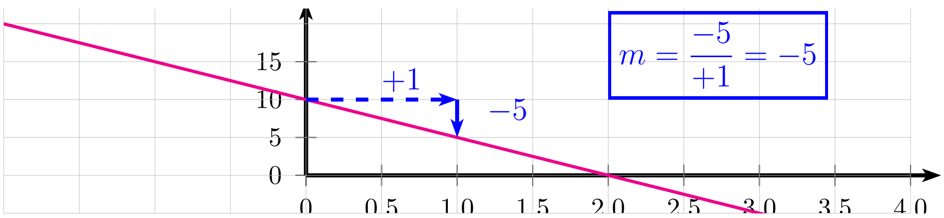
$$f(x) = -\frac{2}{3}x + p$$

- Il reste p à déterminer. Or $f(3) = -1$ (ou $A(3\ ;\ -1)$ est un point de la droite), d'où

$$\begin{aligned} f(3) = -1 &\iff -\frac{2}{3} \times 3 + p = -1 \\ &\iff -2 + p = -1 \\ &\iff p = 1 \end{aligned}$$

- Conclusion : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = -\frac{2}{3}x + 1}$.

Application 2 (Point bac) : déterminer graphiquement une fonction affine ou une équation de droite.



- On lit facilement l'ordonnée à l'origine $p = 10$
- La droite passe par les points $\begin{cases} A(0\ ;\ 10) \\ B(1\ ;\ 5) \end{cases}$ donc le coefficient directeur est :

$$m = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x} = \frac{5 - 10}{1 - 0} = -5$$

- La fonction affine associée à cette droite est donc définie par :

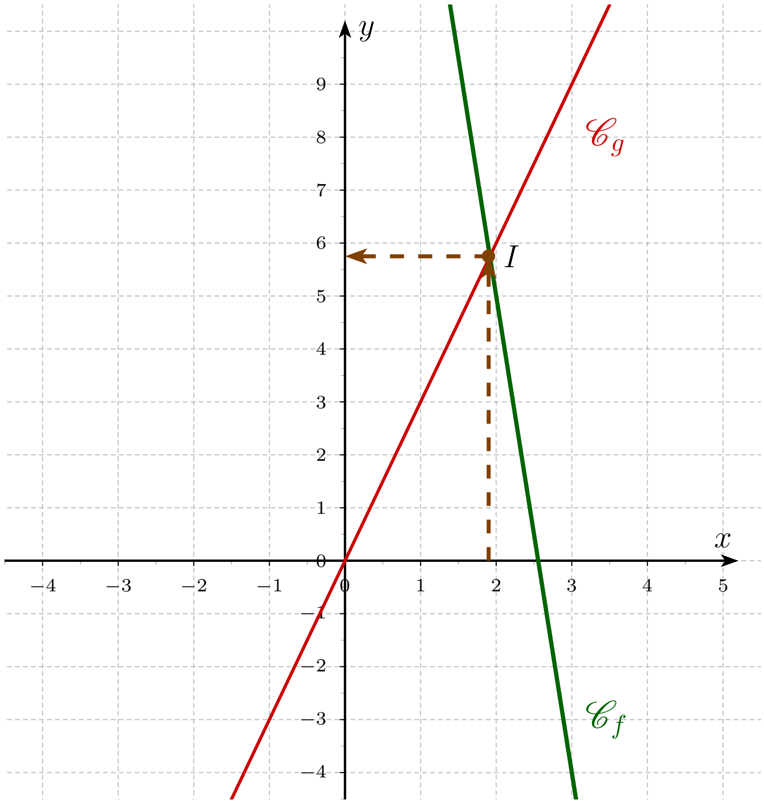
$$\boxed{f(x) = -5x + 10}$$

III. Compléments : Intersection

Propriété 2 (. . . . .)

Soient f et g deux fonctions affines dont les courbes représentatives sont respectivement les droites $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Les solutions (si elles existent) de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des (éventuels) points d'intersection des deux courbes (ici, des deux droites).

Exemple
Soient f et g deux fonctions affines définies par : $f(x) = -9x + 23$ et $g(x) = 3x$.
Déterminons les coordonnées du point d'intersection des deux droites associées à ces fonctions affines.



Calcul de l'abscisse du point d'intersection.
Les solutions (si elles existent) de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des (éventuels) points d'intersection des deux courbes. On va donc résoudre cette équation :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -9x + 23 = 3x \\ &\iff 23 = 12x \\ &\iff x = \frac{23}{12} \approx \underline{1,9} \end{aligned}$$

L'abscisse du point d'intersection I est donc $x_I = \dfrac{23}{12}$.

Calcul de l'ordonnée du point d'intersection.
Pour calculer l'ordonnée du point d'intersection, il suffit de calculer l'image de $x_I = \dfrac{23}{12}$ par f ou par g.
On choisit généralement le calcul le plus simple, ici avec g :

$$g\left(\frac{23}{12}\right) = 3 \times \frac{23}{12} = \frac{23}{4} = \underline{5,75}$$

Le point d'intersection I est donc de coordonnées $I\left(\dfrac{23}{12}\ ;\ 5,75\right)$