Math93.com

Notion de fonction

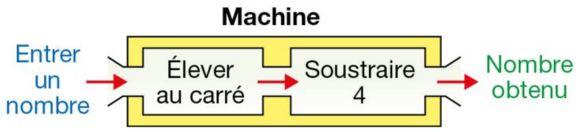
Troisième

I. Une première approche (retour sur l'activité de découverte)

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Élever au carré.
- Soustraire 4.
- Écrire le nombre obtenu.

Il peut être représenté par la machine ci-dessous :



A un nombre x de départ, cette machine, ou ce programme associe le nombre image $x^2 - 4$.

On dit que l'on a défini une fonction f, qui à une nombre noté x, associe une image que l'on va noter $f(x)$.

Le nombre image $f(x)$ se lit « f *de* x »

$$\boxed{x \xrightarrow{f} f(x) = x^2 - 4}$$

Remarque

- Une fonction notée f est un procédé qui à un nombre x associe un nombre $f(x)$.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

- Le nombre $f(x)$ est l'image de x par f.

Exemple

1. Si on choisit $x = 4$ au départ on obtient 12 donc **l'image** de 4 par la fonction f est 12.

$$4 \xrightarrow{f} 12 \qquad \text{soit} \quad f(4) = 12$$

On dira que 4 est UN **antécédent** de 12 par f, (on ne sait pas si il n'y en a pas d'autres).

2. Si on choisit x au départ on obtient $x^2 - 4$ donc **l'image** de x par la fonction f est $x^2 - 4$.

$$x \xrightarrow{f} x^2 - 4 \qquad \text{soit} \quad f(x) = x^2 - 4$$

3. Si on choisit $x = 2$ au départ ou $x = -2$ on obtient 0 donc l'image de $x = 2$ par la fonction f est 0, et l'image de (-2) par f est aussi 0.

$$\begin{cases} -2 \xrightarrow{f} 0 \qquad \text{soit} \quad f(-2) = 0 \\ 2 \xrightarrow{f} 0 \qquad \text{soit} \quad f(2) = 0 \end{cases}$$

On dira que (-2) et 2 sont des **antécédents** de 0 par f.
On vient de montrer que 0 avait au moins deux antécédents par f.

II. Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dits réels, c'est à dire l'ensemble de tous les nombres connus en 3e.

Définition 1 (Fonction (*fonction, map, mapping in english*))

Une fonction notée f, définie sur un ensemble D est une relation qui, à un nombre de l'ensemble D, associe un unique nombre noté $f(x)$, qui se lit : « f de x » (« f *of* x *in english* »).
On note ainsi :

$$\begin{cases} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Remarque

Ne pas confondre f et $f(x)$.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

- f désigne la fonction, la machine, le procédé (la notation vient du mathématicien Leonhard Euler en 1734).
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f, c'est un nombre.

Définition 2 (L'image (*image in english*) et Un antécédent (*pre-image in english*))

- Ensemble de définition de f : *(the domain or set of departure in english)*
  L'ensemble D est l'**ensemble de définition de f**, on le note D_f.
  C'est l'ensemble des valeurs que l'on peut choisir comme nombre de départ.

- L'Image : (*image in english*)
  Le nombre $f(x)$ est **l'image** de x par f :

$$x \longmapsto f(x) = \text{Image de } x \text{ par } f$$

- UN Antécédent : (*pre-image , less frequently : counterimage or inverse image*)

$$a \xrightarrow{f} b$$

  Le nombre a est **un antécédent** (il peut y en avoir d'autres) de b par f.

- Pour résumer :

$$\boxed{\text{UN antécédent} \longmapsto \text{L'Image}}$$

Exemple

Associer à un nombre entier naturel son double c'est définir la fonction f qui a tout entier x, associe l'image $2 \times x$ soit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2 \times x \end{cases}$$

On a alors pour $x = 5$ par exemple :

$$5 \longmapsto f(5) = 10$$

Donc on a :

- 10 est l'image de 5 par la fonction f .
- et 5 est un antécédent de 10 par la fonction f. Dans ce cas, c'est le seul antécédent de 10 par f.

Exemple

Associer à un nombre quelconque (donc un réel) son carré moins 1 c'est définir la fonction g qui a tout entier x, associe l'image $x^2 - 1$ soit :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 - 1 \end{array} \right.$$

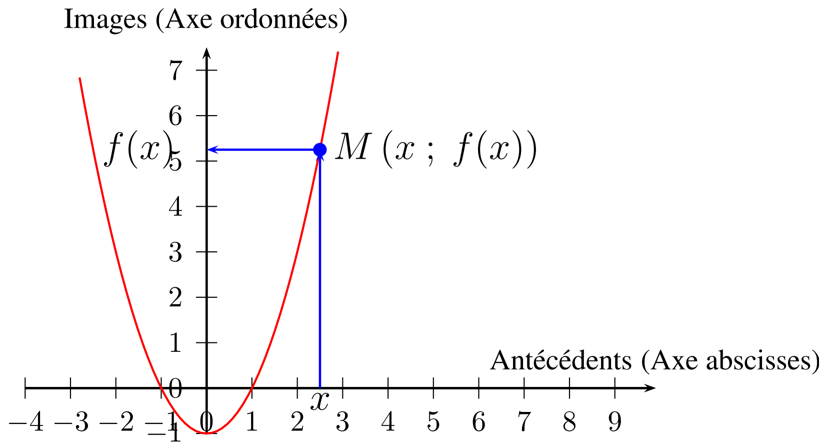
On a alors pour $x = 5$ par exemple on a $g(5) = 5^2 - 1 = 24$ soit :

$$5 \longmapsto g(5) = 24$$

- 24 est l'image de $x = 5$ par la fonction g car $g(5) = 24$.
- $x = 5$ est un antécédent de 24 par la fonction g car $g(5) = 24$.
- $g(-5) = 24$ donc l'image de $x = -5$ par g est aussi 24.
  Le nombre 24 a donc (au moins) deux antécédents, 5 et -5.

III. Plusieurs façons de définir une fonction

III.1 Exemple de fonction définie graphiquement

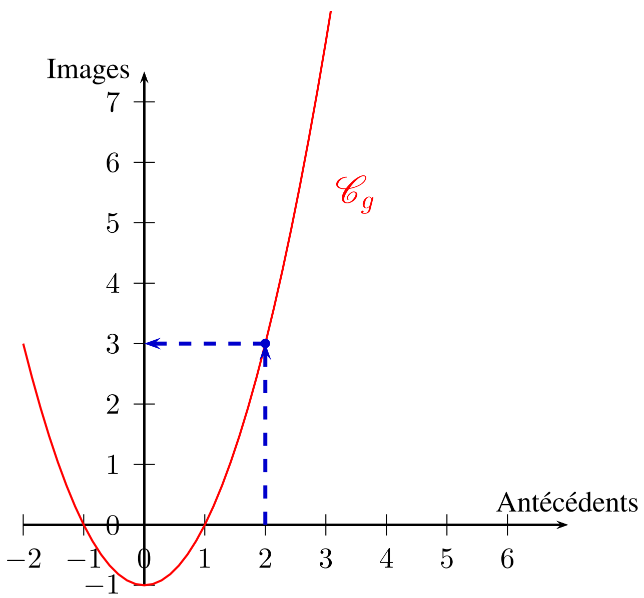


Définition 3 (Courbe représentative)

Soit un repère du plan.
On appelle courbe représentative de la fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

$$\mathscr{C}_f = \{M\ (x\ ;\ f(x))\,, x \in D_f\}$$

Lecture d'une image

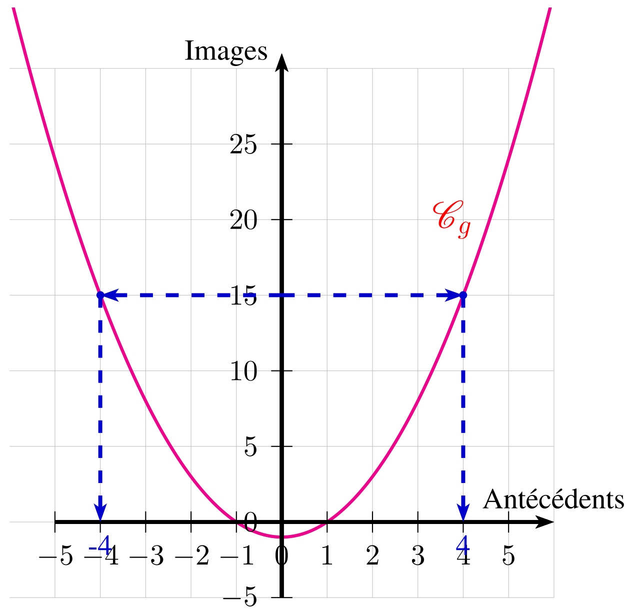


L'image de 2 par la fonction g est 3.

Avec la fonction g de l'exemple 2, on retrouve ce résultat puisque si la fonction g est définie par $g(x) = x^2 - 1$ alors on a :

$$g(2) = 2^2 - 1 = 3$$

Lecture d'antécédents éventuels



Par lecture graphique, les antécédents de 15 par la fonction g sont les nombres -4 et 4.

Avec la fonction g de l'exemple 2, on retrouve ce résultat puisque si la fonction g est définie par $g(x) = x^2 - 1$ alors on a :

$$\begin{cases} g(4) = 4^2 - 1 = 15 \\ g(-4) = (-4)^2 - 1 = 15 \end{cases}$$

III.2 Exemple de fonction définie algébriquement

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 1$$

- Choisir un nombre;
- le mettre au carré;
- soustraire 1 au résultat;

On peut alors obtenir un tableau de valeurs :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Image $g(x) = x^2 - 1$	3	1.25	0	-0.75	-1	-0.75	0	1.25	3	5.25	8

III.3 Exemple de fonction définie par un tableau de valeurs

x	-5	-4.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Image $g(x)$	24	19.25	15	11.25	8	5.25	3	1.25	0	-0.75	-1	-0.75	0	1.25	3	5.25	8

On peut donc lire que :

- $g(-4) = 15$ donc l'image de (-4) par g est 15.
- 0 a (au moins) deux antécédents par g qui sont (-1) et 1.

IV. Compléments : Approche historique

Une étude complète sur le site : www.math93.com/...histoire-de-la-notion-de-fonction

Pour résumer cependant :

- Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague;
- Le **terme de fonction**
  - Le terme a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques;
  - C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, et J.Bernouilli (1654-1705) en donne une première définition.
- **La notation**.
  - BERNOULLI Jean (1667-1748) propose **la notation : $\boldsymbol{\Phi x}$**;
  - Le symbole $f(x)$ pour désigner une fonction de la variable x, voit sa première utilisation avec Leonhard EULER (1707-1783) en 1734 dans *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*.

- Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), en introduisant la fonction discontinue partout, caractéristique des irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), définit explicitement la fonction comme nous la définissons aujourd'hui;
- Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.
  - En acoustique, les mathématiciens de la fraternité pythagoricienne au 6ème siècle av. J.-C., recherchèrent des relations entre la hauteur des sons émis par des cordes pincées et la longueur de ces cordes;
  - En astronomie, les mathématiciens grecs d'Alexandrie dressent des tables donnant la longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ces sont les fameuses premières tables de sinus que l'on peut observer dans l'Almageste de PTOLÉMÉE Claude (2ème siècle).