Math93.com

Probabilités (élève)

Troisième

I. Un peu d'histoire

- **Naissance d'une notion**
  Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant,c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.
  Le problème initial le plus fameux est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Le mathématicien italien Luca Pacioli l'évoque dans son *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494.

- **Le premier traité de probabilité par Christiaan Huygens (1629-1695).**

  Lors d'un voyage à Paris, le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens, prend connaissance de la correspondance entre les mathématiciens français Fermat (1601-1665) et Pascal (1623-1662). Il étudie ces réflexions et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). C'est le premier traité consacré à cette nouvelle théorie des probabilités.

- ***Pour en savoir plus** : Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com*

II. Vocabulaire des évènements

Dans tout ce qui suit, les lettres n et i désignes des entiers naturels non nul.

II.1 Expérience aléatoire

Définition 1

Une expérience est dite *aléatoire* lorsque l'on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Exemple 1
Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.
Tirer une boule, c'est réaliser une expérience aléatoire.

II.2 Univers, évènements

Définition 2

1. **Issue** : Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
2. **Univers** : L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers. On le note souvent Ω (lire Oméga).
3. **Évènement** : Un évènement est un sous-ensemble, c'est à dire une partie de l'univers Ω. On le note souvent par une lettre majuscule, par exemple A, B, C, E.
4. **Évènement élémentaire** : Un évènement élémentaire est une issue de l'expérience.
5. On dit qu'une issue réalise un évènement lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'évènement.

Exemple

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4. Tirer une boule et noter le numéro, c'est réaliser une expérience aléatoire.

- Les issues possibles sont : ....
- L'univers associé est alors : ....
- Un évènement est par exemple : $A =$ ....
- Un évènement élémentaire (ou issue) est par exemple :$B =$ ....
- L'évènement A se traduit par : ....

Définition 3

1. **Évènement impossible** : L'évènement impossible est l'ensemble vide noté $\varnothing$.
2. **Évènement certain** : L'évènement certain est l'univers Ω. Toutes les issues le réalisent.

III. Probabilité d'un évènement sur un ensemble fini

III.1 Loi de probabilité

Définition 4 (Loi de probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω composé d'un nombre fini n d'évènements élémentaires :

$$\Omega = \{e_1 \; ; \; e_2 \; ; \; e_3 \; ; \; \cdots \; ; \; e_n\}$$

1. **Loi de probabilité**
   Définir une loi de probabilité sur l'univers Ω, c'est associer à chaque évènement élémentaire (ou issue) e_i, un réel positif ou nul p_i tel que :
   $$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$
2. **Probabilité de e_i**
   Le nombre réel positif ou nul p_i est appelé probabilité de l'évènement élémentaire $\{e_i\}$. On note alors :
   $$p(e_i) = p_i$$
3. **Probabilité de l'évènement A**
   La probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui composent A. On note la alors : $p(A)$.

Exemple

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4. On tire une boule et on note son numéro. On note e_1 l'évènement, « obtenir une la boule 1 » , e_2 l'évènement, « obtenir une la boule 2 », e_3 l'évènement, « obtenir une la boule 3 » et e_4 l'évènement, « obtenir une la boule 4 »

- L'univers associé est alors

$$\Omega = \{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

- Il y a $\cdots\cdots\cdots$ boules qui portent le n°1 sur un total de $\cdots\cdots\cdots$, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p(e_1) = \cdots\cdots\cdots$$

On obtient de la même façon :

$$p(e_2) = \cdots\cdots\cdots \quad ; \; p(e_3) = \cdots\cdots\cdots \quad ; \; p(e_4) = \cdots\cdots\cdots$$

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p(e_1)$	....	....	....	....	....

- Avec A l'évènement $A = \{1\ ;\ 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » on a :

$$p(A) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

III.2 Évènements particuliers

Propriété 1

1. **Évènement certain Ω**. La Probabilité de l'évènement certain Ω est :

$$p(\Omega) = 1$$

2. **Évènement impossible** $\varnothing$. La probabilité de l'évènement impossible $\varnothing$ est :

$$p(\varnothing) = 0$$

3. Pour tout évènement A on a :

$$\boxed{0 \leqslant p(A) \leqslant 1}$$

Propriété 2 (Évènements incompatibles)

Deux évènements sont dits incompatibles lorsqu'aucune issue ne les réalise en même temps.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit l'évènement $A = \{1\ ;\ 2\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » ;
- et l'évènement $B = \{3\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 » .

Les évènements A et B sont incompatibles car aucune issue ne les réalise en même temps.

III.3 Évènement contraire

Définition 5

L'évènement contraire de l'évènement A est l'évènement qui se réalise quand A ne se réalise pas. On le note $\overline{A}$, ce qui se lit « A barre » .

Propriété 3

La somme d'un évènement et de son évènement contraire vaut 1 ce qui s'écrit :

$$\boxed{P\left(A\right)+P\left(\overline{A}\right)=1} \iff \boxed{P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)}$$

Remarque : Un évènement et son contraire sont incompatibles mais si A et B sont incompatibles, cela ne signifie pas que B est le contraire de A.

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit l'évènement $B=\{3\}$ qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 » .
- Le contraire de l'évènement B est l'évènement

$$\overline{B}=\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

qui se traduit par : ....

On peut alors facilement vérifier que :

$$P\left(\overline{B}\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ; \; P\left(B\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Et on a bien :

$$P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)$$

III.4 Compléments : Lien entre fréquences et probabilités

Le mathématicien suisse, Jakob Bernoulli étudie le premier les liens entre fréquences et probabilités dans un ouvrage publié en 1713, juste après sa mort.
Cette œuvre aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre la *loi faible des grands nombres* pour le jeu de pile ou face, appelé théorème de Bernoulli.
Beaucoup de compléments sur le site www.math93.com

Propriété 4

Si l'on effectue une expérience aléatoire n fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un évènement se stabilise lorsque n devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe qui est égal à la probabilité de cet évènement.

Exemple 1
Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$p(e_1)$	$0,25$	$0,25$	$0,375$	$0,125$	1

- On simule sur tableur plusieurs tirages avec remise (on replace la boule tirée après chaque tirage) de boules dans une urne de même composition. On obtient alors :

n° sortis	1	2	3	4	Total
Fréquence pour $n = 100$ tirages	$0,19$	$0,31$	$0,35$	$0,15$	1
Fréquence pour $n = 1\,000$ tirages	$0,235$	$0,265$	$0,371$	$0,129$	1
Fréquence pour $n = 5\,000$ tirages	$0,2495$	$0,2505$	$0,3735$	$0,1265$	1