



### I. Un peu d'histoire

- **Naissance d'une notion**

Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant, c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Le problème initial le plus fameux est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Le mathématicien italien Luca Pacioli l'évoque dans son *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494.

- **Le premier traité de probabilité par Christiaan Huygens (1629-1695).**



Lors d'un voyage à Paris, le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens, prend connaissance de la correspondance entre les mathématiciens français Fermat (1601-1665) et Pascal (1623-1662). Il étudie ces réflexions et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). C'est le premier traité consacré à cette nouvelle théorie des probabilités.

- *Pour en savoir plus : Beaucoup de compléments sur le site [www.math93.com](http://www.math93.com)*

### II. Vocabulaire des évènements (*event in english*)

Dans tout ce qui suit, les lettres  $n$  et  $i$  désignent des entiers naturels non nul.

#### II.1 Expérience aléatoire (*Random experiments in english*)

##### Définition 1

Une expérience est dite *aléatoire* lorsque l'on ne peut pas prévoir l'issue (*outcomes*) de cette expérience.

##### Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4. Tirer une boule, c'est réaliser une expérience aléatoire.

## II.2 Univers, évènements

### Définition 2

- Issue (individual outcomes)** : Une issue d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
- Univers (sample space)** : L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.  
On le note souvent  $\Omega$  (lire Oméga).  
*A sample space,  $\Omega$  (or  $S$ ), is the set of all possible outcomes.*
- Évènement (event)** : Un évènement est un sous-ensemble, c'est à dire une partie de l'univers  $\Omega$ . On le note souvent par une lettre majuscule, par exemple A, B, C, E.
- Évènement élémentaire (elementary event)** : Un évènement élémentaire est une issue de l'expérience.  
*An event consisting of only a single outcome is called an elementary event or an atomic event; that is, it is a singleton set.*
- On dit qu'une issue réalise un évènement lorsque cette issue est un résultat appartenant à l'évènement.

### Exemple 1

- Les issues possibles sont 1, 2, 3 et 4.
- L'univers associé est alors  $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ .
- $A = \{1 ; 2\}$  est un évènement et  $B = \{1\}$  un évènement élémentaire ou issue.
- L'évènement A se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 »

### Définition 3

- Évènement impossible** : L'évènement impossible est l'ensemble vide noté  $\emptyset$ .
- Évènement certain** : L'évènement certain est l'univers  $\Omega$ . Toutes les issues le réalisent.

## III. Probabilité d'un évènement sur un ensemble fini

### III.1 Loi de probabilité (Probability distribution)

#### Définition 4 (Loi de probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  composé d'un nombre fini  $n$  d'évènements élémentaires :

$$\Omega = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; \dots ; e_n\}$$

#### 1. Loi de probabilité (Probability distribution)

Définir une loi de probabilité sur l'univers  $\Omega$ , c'est associer à chaque évènement élémentaire (ou issue)  $e_i$ , un réel positif ou nul  $p_i$  tel que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

*To specify a probability mass function  $p$  assigning a probability to each possible outcome.*

#### 2. Probabilité de $e_i$

Le nombre réel positif ou nul  $p_i$  est appelé probabilité de l'évènement élémentaire  $\{e_i\}$ . On note alors :

$$p(e_i) = p_i$$

#### 3. Probabilité de l'évènement A

La probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui composent A. On note la alors :  $p(A)$ .

**Exemple 1**

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- L'univers associé est alors  $\Omega = \{e_1 = 1 ; e_2 = 2 ; e_3 = 3 ; e_4 = 4\}$ .
- Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p(e_1) = \frac{2}{8} = 0,25$$

On obtient de la même façon :

$$p(e_2) = \frac{2}{8} = 0,25 ; p(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375 ; p(e_4) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

$e_i$	1	2	3	4	Total
$p(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- Avec  $A$  l'évènement  $A = \{1 ; 2\}$  qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » on a :

$$p(A) = p(e_1) + p(e_2) = 0,5$$

**III.2 Évènements particuliers****Propriété 1**

1. **Évènement certain  $\Omega$  (*absolutely certain event*)**. La Probabilité de l'évènement certain  $\Omega$  est :

$$p(\Omega) = 1$$

2. **Évènement impossible  $\emptyset$  (*impossible event*)**. La probabilité de l'évènement impossible  $\emptyset$  est :

$$p(\emptyset) = 0$$

3. Pour tout évènement  $A$  on a :

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

*The probability of an impossible event is 0. The probability of an absolutely certain event is 1.*

**Propriété 2 (Évènements incompatibles (*mutually exclusive events*))**

Deux évènements sont dits incompatibles lorsqu'aucune issue ne les réalise en même temps.

**Exemple 1**

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit l'évènement  $A = \{1 ; 2\}$  qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 » ;
- et l'évènement  $B = \{3\}$  qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 » .

Les évènements  $A$  et  $B$  sont incompatibles car aucune issue ne les réalise en même temps.

### III.3 Évènement contraire (*complementary event*)

**Définition 5** (Évènement contraire (*complementary event*))

L'évènement contraire de l'évènement  $A$  est l'évènement qui se réalise quand  $A$  ne se réalise pas. On le note  $\overline{A}$ , ce qui se lit «  $A$  barre ».

**Propriété 3**

La somme d'un évènement et de son évènement contraire vaut 1 ce qui s'écrit :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \iff P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

*Remarque : Un évènement et son contraire sont incompatibles mais si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, cela ne signifie pas que  $B$  est le contraire de  $A$ .*

**Exemple 1**

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit l'évènement  $B = \{3\}$  qui se traduit par : « La boule tirée porte le numéro 3 ».
- Le contraire de l'évènement  $B$  est l'évènement  $\overline{B} = \{1 ; 2 ; 4\}$  qui se traduit par : « La boule tirée porte le n°1 ou le n°2 ou le n°4 ».

On peut alors facilement vérifier que :

$$P(\overline{B}) = \frac{3}{8} ; P(B) = \frac{5}{8} \implies P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

### III.4 Compléments : Lien entre fréquence (*relative frequency*) et probabilité (*probability*)

Le mathématicien suisse, Jakob Bernoulli étudie le premier les liens entre fréquences et probabilités dans un ouvrage publié en 1713, juste après sa mort.

Cette oeuvre aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre la *loi faible des grands nombres* pour le jeu de pile ou face, appelé théorème de Bernoulli. *Beaucoup de compléments sur le site [www.math93.com](http://www.math93.com)*

#### Propriété 4

Si l'on effectue une expérience aléatoire  $n$  fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un évènement se stabilise lorsque  $n$  devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe qui est égal à la probabilité de cet évènement.

#### Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

$e_i$	1	2	3	4	Total
$p(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- On simule sur tableur plusieurs tirages avec remise (on replace la boule tirée après chaque tirage) de boules dans une urne de même composition. On obtient alors :

n° sortis	1	2	3	4	Total
Fréquence pour $n = 100$ tirages	0,19	0,31	0,35	0,15	1
Fréquence pour $n = 1\,000$ tirages	0,235	0,265	0,371	0,129	1
Fréquence pour $n = 5\,000$ tirages	0,2495	0,2505	0,3735	0,1265	1

#### Propriété 5 (Loi des grands nombres (*the law of large numbers (LLN)*))

En mathématiques, la loi des grands nombres permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation, justifiant ainsi le principe des sondages, et présente l'espérance comme une moyenne.

*In probability theory, the law of large numbers (LLN) is a theorem that describes the result of performing the same experiment a large number of times. According to the law, the average of the results obtained from a large number of trials should be close to the expected value and tends to become closer to the expected value as more trials are performed.*



#### Français/English

Attention aux faux amis en anglais :

- effectif / *frequency* (false friend)
- effectif cumulé / *cumulative frequency* (false friend)
- fréquence / *relative frequency*