Math93.com

Devoir Surveillé n°2

Troisième

Homothétie et théorème de Thalès

Durée 1 heure - Coeff. 5

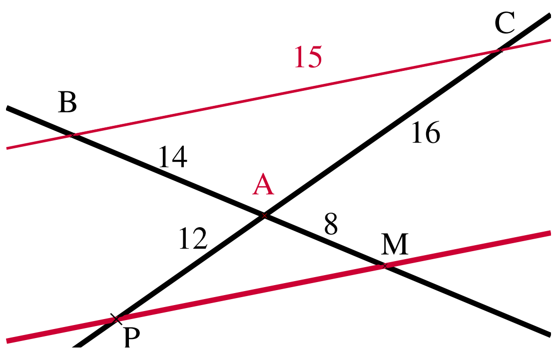
Noté sur 20 points

Exercice 1. Application directe du cours — 3 points

Dans la figure suivante, les droites (BM) et (PC) sont sécantes en A . On sait que :

$AB = 14$ cm ; $AM = 8$ cm ; $AP = 12$ cm ; $AC = 16$ cm

Les droites (BC) et (PM) sont-elles parallèles ?



Corrigé

- **Données**.
  Les points B, A, M et P, A, C sont alignés.

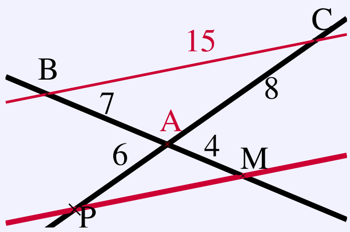
- **Le test, avec mise au même dénominateur**.

D'une part :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{8}{14} = \frac{16}{28}$$

D'autre part part :

$$\frac{AP}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$



- **Conclusion**.
  On n'a donc pas égalité, $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AP}{AC}$. De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, Les droites (BC) et (MP) ne sont pas parallèles.

Exercice 2. Construire et calculer — 6.5 points

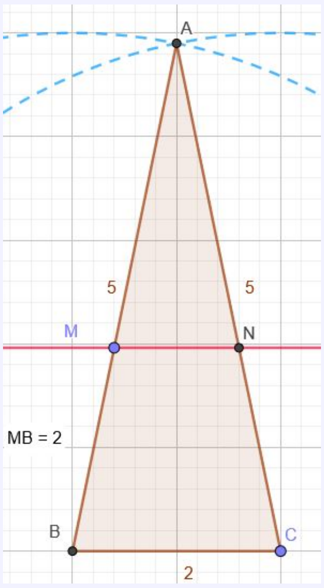
1. Construction.

1. a. Construire un triangle ABC isocèle en A et tel que $AB = 5$ cm et $BC = 2$ cm.

1. b. Placer le point M du segment $[AB]$ tel que $BM = 2$ cm.

1. c. Tracer la parallèle à la droite (BC) et passant par le point M. Cette droite coupe le segment $[AC]$ en un point que l'on note N.

Corrigé



2. Calculer les longueurs MN et AN.

Corrigé

- Données : les points A, M, B et A, N, C sont alignés et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
- Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Puisque M appartient au segment [AB], $AM = AB - BM = 3$ cm
- Et donc

$$\frac{3}{5} = \frac{AN}{5} = \frac{MN}{2}$$

- Soit

$$\boxed{AN = 3\text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{MN = \frac{3 \times 2}{5} = 1,2\text{ cm}}$$

3. Montrer que les périmètres du triangle AMN et du quadrilatère BMNC sont égaux.

Corrigé

- Le périmètre de AMN est :

$$P_1 = AM + MN + NA = 3 + 1,2 + 3 = \underline{7,2\text{ cm}}$$

- Le périmètre de BMNC est :

$$P_2 = 2 + 1,2 + NC + 2 = 5,2 + NC$$

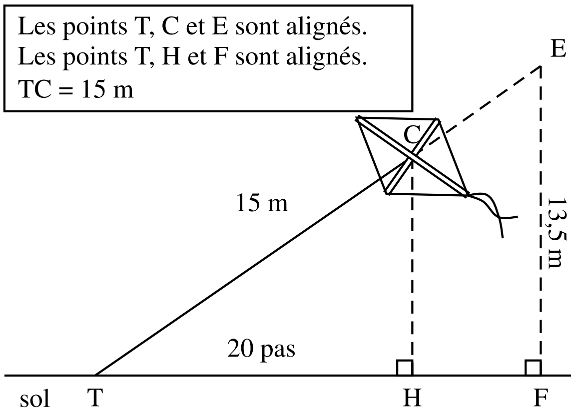
Or N appartient au segment [AC] donc $NC = AC - AN = 2$ cm soit

$$P_2 = \underline{7,2\text{ cm}}$$

- Conclusion : les périmètres du triangle AMN et du quadrilatère BMNC sont égaux.

Exercice 3. Un cerf-volant — 6 points

Thomas attache son cerf-volant au sol au point T.
Il fait 20 pas pour parcourir la distance TH.
Un pas mesure 0,6 mètre.
Le schéma ci-contre illustre la situation. Il n'est pas à l'échelle.



1. Montrer que la hauteur CH du cerf-volant est égale à 9 m.
2. Thomas souhaite que son cerf-volant atteigne une hauteur EF de 13,5 m.

   Calculer la longueur TE de la corde nécessaire.

Corrigé

1. **Montrer que la hauteur CH du cerf-volant est égale à 9 m.**
   On a $\text{TH} = 20 \times 0,6 = 12$ (m).

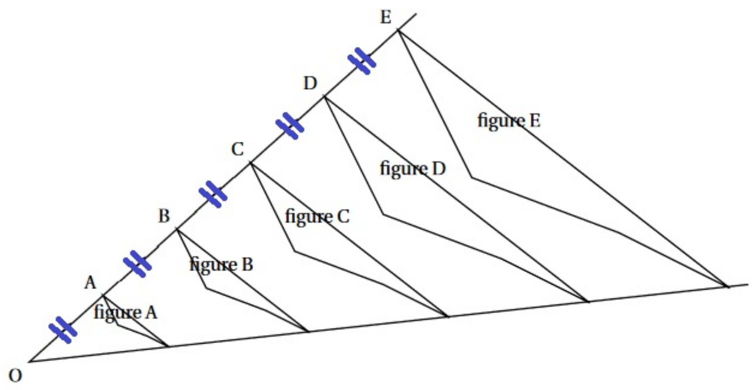
   Dans le triangle CTH rectangle en H le théorème de Pythagore s'écrit :
   $$\text{CT}^2 = \text{TH}^2 + \text{HC}^2$$
   ou
   $$15^2 = 12^2 + \text{HC}^2$$
   soit
   $$\text{HC}^2 = 15^2 - 12^2 = 81$$
   d'où puisque CH est positif, $\underline{\text{CH} = 9 \text{ m}}$.

2. **Thomas souhaite que son cerf-volant atteigne une hauteur EF de 13,5 m. Calculer la longueur TE de la corde nécessaire.**

   - Les droites (CH) et (EF) étant toutes deux perpendiculaires à la droite (TH) sont parallèles ;
   - Les points T, H, F et T, C, E sont alignés et les droites (HC) et (EF) parallèles.
   - D'après le théorème de Thalès :
   $$\frac{\text{EF}}{\text{CH}} = \frac{\text{TE}}{\text{CT}} \text{ soit } \frac{13,5}{9} = \frac{\text{TE}}{15}$$
   Soit $\text{TE} = 15 \times \dfrac{13,5}{9} = \underline{22,5 \text{ m}}$

Exercice 4. Homothéties 1.5 points

Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.



1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A ?

Corrigé

Le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A est $k = 3$ puisque on a :

$$OC = 3 \times OA \Longrightarrow \boxed{k = \frac{OC}{OA} = 3}$$

2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ?

Corrigé

Si on applique l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{3}{5}$ à la figure E, alors le point E se transforme en le point E' tel que :

$$OE' = \frac{3}{5} \times OE = OC$$

Donc <u>la figure E se transforme en la figure C</u>.

3. Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ?

Corrigé

Agrandissement/réduction

Quand on multiplie les distances par un réel strictement positif k, les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3.

Donc ici, si une figure a une aire 4 fois plus grande que la figure A, ses dimensions ont été multipliées par $k' = 2$, car ainsi, les aires le sont par $k'^2 = 4$. De ce fait c'est la figure B qui a une aire 4 fois plus grande que la figure A puisque le rapport d'homothétie permettant de passer de la figure A à la figure B est :

$$k' = \frac{OB}{OA} = 2$$

Exercice 5. Déjà vu ? 3 points

On considère l'expression $A(x)$ définie par : $A(x) = (9x+2)^2 - 49$.

1. Calculer $A(x)$ pour $x = -1$ ce que l'on notera $A(-1)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(-1) &= (9 \times (-1) + 2)^2 - 49 \\ &= (-7)^2 - 49 \\ A(-1) &= 49 - 49 = \underline{0} \end{aligned}$$

2. Développer $A(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (9x+2)^2 - 49 \\ A(x) &= 81x^2 + 36x + 4 - 49 \\ A(x) &= \underline{81x^2 + 36x - 45} \end{aligned}$$

3. Factoriser $A(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (9x+2)^2 - 49 \\ A(x) &= (9x+2)^2 - 7^2 \\ A(x) &= \Big(9x+2-7)\Big)\Big(9x+2+7\Big) \\ A(x) &= \underline{\Big(9x-5\Big)\Big(9x+9\Big)} = \underline{9(9x-5)(x+1)} \end{aligned}$$

Fin du devoir

Question Bonus

Dans l'exercice 2 calculer l'aire du triangle ABC.