Math93.com

Devoir Surveillé n°B2

Troisième

Fonctions

Durée 1 heure - Coeff. 5

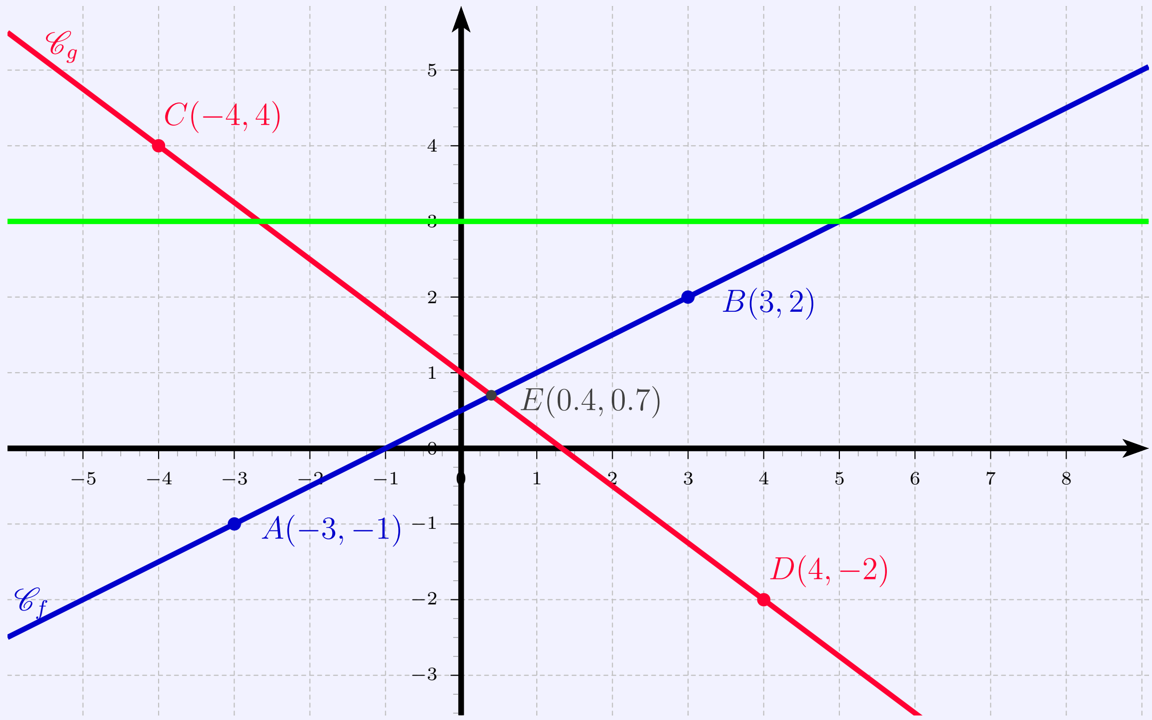
Noté sur 20.5 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. 12 points

Corrigé (0,5+0,5+0,5 point)



1. Placer dans le repère ci-dessus les points $A(-3\ ;\ -1)$, $B(3\ ;\ 2)$. Tracer la droite (AB).

2. Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f. Déterminer l'expression de f.

Corrigé (2 points)

- f est affine donc de la forme

$$f\ :\ x \longmapsto mx+p$$

D'après la proportionnalité des accroissements on a :

$$\begin{cases} A(-3\ ;\ -1) \\ B(3\ ;\ 2) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{3-(-3)} = \frac{1}{2}$$

Donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x + p$.

- Pour déterminer p on utilise un des deux points, $B(3\ ;\ 2)$ par exemple.

$$f(3) = 2 \iff \frac{1}{2} \times 3 + p = 2 \iff p = \frac{1}{2}$$

- Conclusion :

$$\boxed{f\ :\ x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$.

3. a. Montrer que g est affine. Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$?

Corrigé (1 point)

g est de la forme $x \longmapsto mx + p$ avec $m = -\frac{3}{4}$ et $p = 1$ donc elle est affine.
De ce fait, sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est une droite, deux points vont suffire pour la tracer.

3. b. Calculer l'image de (-4) par g et l'image de 4 par g.

Corrigé (1 point)

L'image de (-4) par g est : $g(-4) = -\frac{3}{4} \times (-4) + 1 = 4$.

L'image de 4 par g est : $g(4) = -\frac{3}{4} \times 4 + 1 = -2$.

3. c. Déterminer un antécédent de 0 par g.

Corrigé (1 point)

Les antécédents de 0 par g sont les (éventuelles) solutions de l'équation $g(x) = 0$.
Or on a :

$$g(x) = 0 \iff -\frac{3}{4}x + 1 = 0 \iff -3x + 4 = 0 \iff \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

3. d. Compléter sans justification avec les questions précédentes le tableau de valeurs suivants.

Corrigé (1 point)

x	-4	0	$\frac{4}{3}$	4
$g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$	4	1	0	-2

3. e. Construire sur le même graphique la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. (Aucune justification n'est attendue).

4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites (AB) et $\mathscr{C}_g$.
Aide : on pourra admettre que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Corrigé (2 points)

On cherche x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + 1 \quad \text{(on multiplie les 2 membres par 4)} \\ &\iff 2x + 2 = -3x + 4 \\ &\iff 5x = 2 \\ &\iff x = \frac{2}{5} = 0,4 \end{aligned}$$

On en déduit l'ordonnée en remplaçant x par $x = \dfrac{2}{5} = 0,4$ dans l'expression de f ou de g, au choix.

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 0,7$$

Donc le point d'intersection E est de coordonnées : $E(0,4\ ;\ 0,7)$.

5. On considère maintenant la fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

5. a. Construire $\mathscr{C}_h$ sur le même graphique. (Aucune justification n'est attendue).

5. b. Déterminer graphiquement les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_g$ puis de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_f$.

Corrigé (0.5 points)

Graphiquement :

- $x \approx -2,5$ est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_g$;
- $x = 5$ est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_f$;

5. c. Retrouver ce résultat par le calcul.

Corrigé (2 points)

- Intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_f$.
  On cherche x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) &\iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 3 \\ &\iff x + 1 = 6 \\ &\iff \underline{x = 5} \end{aligned}$$

  Donc $x = 5$ est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_f$;
- Intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_g$.
  On cherche x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) &\iff -\frac{3}{4}x + 1 = 3 \\ &\iff -3x + 4 = 12 \\ &\iff -3x = 8 \\ &\iff \boxed{x = -\frac{8}{3} \approx -2,7} \end{aligned}$$

  Donc $x = -\dfrac{8}{3} \approx -2,7$ est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{C}_f$;

Exercice 2. 8.5 points

Une association propose diverses activités pour occuper les enfants pendant les vacances scolaires. Plusieurs tarifs sont proposés :

- Tarif A : 8 € par demi-journée ;
- Tarif B : une adhésion de 30 € donnant droit à un tarif préférentiel de 5 € par demi-journée

Un fichier sur tableur a été préparé pour calculer le coût à payer en fonction du nombre de demi-journées d'activités pour chacun des tarifs proposés :

B2 ✗ ✔ f_x =B1*8

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de demi-journées	1	2	3	4	5
2	Tarif A	8	16			
3	Tarif B	35	40			

1. Retrouver par le calcul les valeurs des cases C2 et C3 du tableur (soit 16 et 40) en expliquant ce qu'elles représentent.

Corrigé (1 point)

- Pour C2. Cela correspond au prix pour 2 demi-journées avec le tarif A soit :

$$8€ \times 2 = \underline{16€}$$

- Pour C3. Cela correspond au prix pour 2 demi-journées avec le tarif B soit :

$$5€ \times 2 + 30€ = \underline{40€}$$

2. Compléter ce tableau (aucune justification n'est demandée).

Corrigé (1 point)

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de demi-journées x	1	2	3	4	5
2	Tarif A $(8x)$	8	16	24	32	40
3	Tarif B $(5x+30)$	35	40	45	50	55

3. Donner (sans justification) la formule qui a été saisie dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite.

Corrigé (0,5 point)

$$\boxed{= 30 + 5 * \mathrm{B1}}$$

4. On considère les fonctions f et g qui donnent les tarifs à payer en fonction du nombre x de demi-journées d'activités :

- Tarif A : $f(x) = 8x$
- Tarif B : $g(x) = 30 + 5x$

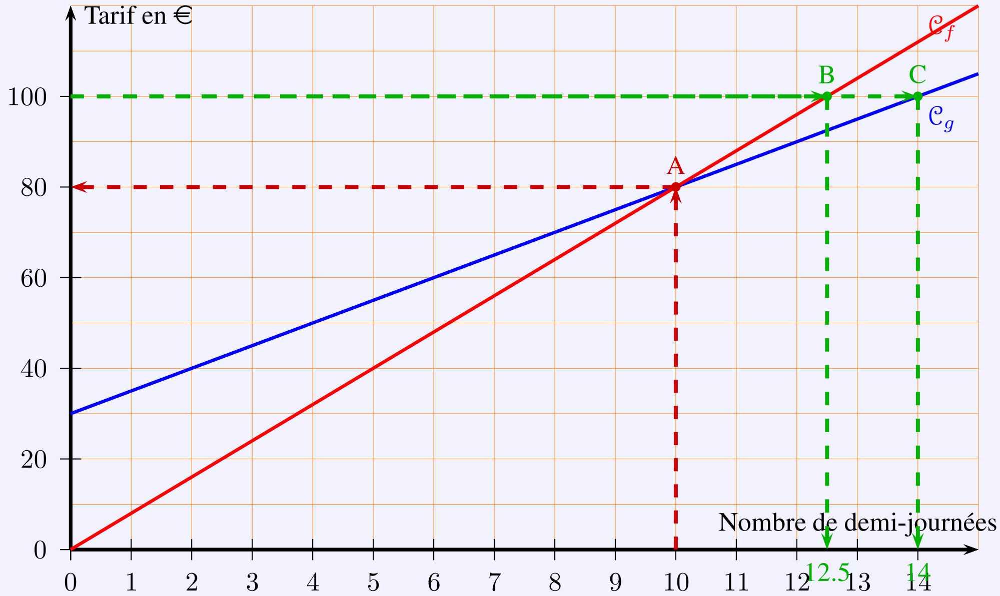
Parmi ces fonctions, quelle est celle qui traduit une situation de proportionnalité ?

Corrigé (1 point)

La fonction f est linéaire car de la forme $f(x) = mx$ avec $m = 8$. De ce fait, elle traduit une situation de proportionnalité.

5. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la fonction g. Représenter sur ce même graphique la fonction f.

Corrigé (1 point)



6. Déterminer graphiquement puis par le calcul le nombre de demi-journées d'activités pour lequel le tarif A est égal au B.

Corrigé (2 points)

- Graphiquement.
  L'abscisse du point d'intersection des deux droites est $x = 10$ donc le nombre de demi-journées d'activités pour lequel le tarif A est égal au B est de 10.
- Par le calcul.
  On cherche x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 8x = 30 + 5x \\ &\iff 3x = 30 \\ &\iff \underline{x = 10} \end{aligned}$$

Le nombre de demi-journées d'activités pour lequel le tarif A est égal au B est de 10.

7. Avec un budget de 100 €, déterminer le nombre maximal de demi-journées auxquelles on peut participer. Expliquez votre méthode (graphique ou calculatoire) avec rigueur (des traces graphiques sont attendues en cas de preuve graphique).

Corrigé (2 points)

- Graphiquement.
  On cherche les antécédents (il n'y en a qu'un ici car ce sont des fonctions affines) de 100 par f et par g.
  On lit alors que 12,5 est l'antécédent de 100 par f et que 14 est l'antécédent de 100 par g.
  Donc on peut faire au maximum 12 demi-journées avec le tarif A et 14 avec le tarif B.
  On peut donc participer à au maximum 14 demi-journées de ski en prenant le tarif B.
- Par le calcul.
  - On cherche l'antécédent de 100 par f soit x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = 100 &\iff 8x = 100 \\ &\iff x = \frac{100}{8} \\ &\iff \underline{x = 12,5} \end{aligned}$$

– On cherche l'antécédent de 100 par g soit x tel que :

$$\begin{aligned} g(x) = 100 &\iff 30 + 5x = 100 \\ &\iff 5x = 70 \\ &\iff \underline{x = \frac{70}{5} = 14} \end{aligned}$$

– Donc on peut faire au maximum 12 demi-journées avec le tarif A et 14 avec le tarif B.
On peut donc participer à au maximum 14 demi-journées de ski en prenant le tarif B.

Fin du devoir

Question Bonus

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soit les points $A(1\ ;\ 1)$ et $B(-1\ ;\ -3)$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x-1)^2$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) et de $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g.

Corrigé (2 points)

- La fonction affine f associée à la droite (AB) est définie par $f(x) = 2x - 1$. Pour obtenir cela on calcul m par la propriété des accroissements puis p comme dans l'exercice 1, question 2.

- On cherche alors x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 2x - 1 = (2x-1)^2 \\ &\iff (2x-1) - (2x-1)^2 = 0 \\ &\iff (2x-1)\Big[1 - (2x-1)\Big] = 0 \\ &\iff (2x-1)(1-2x+1) = 0 \\ &\iff (2x-1)(-2x+2) = 0 \quad \text{(C'est une EPN)} \\ &\iff \Big(2x - 1 = 0\Big) \text{ ou } \Big(-2x+2 = 0\Big) \\ &\iff \boxed{x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1} \end{aligned}$$

- Il reste alors à trouver l'ordonnée de chacun des points.

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{A\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)} \\ f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{B(1\ ;\ 1)} \end{cases}$$