Math93.com

Devoir Surveillé n°3A Correction

Troisième

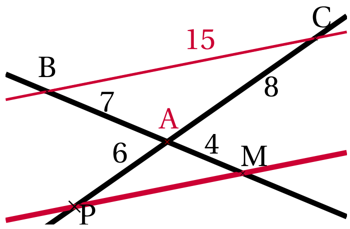
Thalès et homothétie

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Application directe du cours — 3 points

Dans la figure suivante, les droites (BM) et (PC) sont sécantes en A .
On sait que : $B = 7$ cm ; $AM = 4$ cm ; $AP = 6$ cm ; $AC = 8$ cm. Les droites (BC) et (PM) sont-elles parallèles ?



- **Données**.
  Les points B, A, M et P, A, C sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A.

- **Le test, avec mise au même dénominateur**.

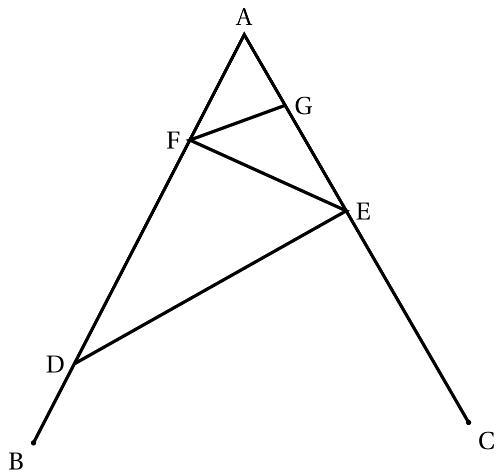
  D'une part :
  $$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{7} = \frac{16}{28}$$
  D'autre part part :
  $$\frac{AP}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

- **Conclusion**.
  On n'a donc pas égalité, $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AP}{AC}$. De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, Les droites (BC) et (MP) ne sont pas parallèles.

Exercice 2. Une construction — 7 points

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. On donne les informations suivantes :

- Le triangle ADE a pour dimensions :
  AD = 7 cm, AE = 4,2 cm et DE = 5,6 cm.
- F est le point de [AD] tel que AF = 2,5 cm.
- B est le point de [AD) et C est le point de [AE) tels que : AB = AC = 9 cm.
- La droite (FG) est parallèle à la droite (DE).



1. **Réaliser une figure en vraie grandeur.**

2. **Prouver que ADE est un triangle rectangle en E.**
   Si le triangle ADE est rectangle, c'est forcément en E car AD est le plus grand côté. On a:

D'une part :
$$\begin{aligned} AD^2 &= 7^2 \\ AD^2 &= 49 \end{aligned}$$
et

D'autre part :
$$\begin{aligned} AE^2 + DE^2 &= 4,2^2 + 5,6^2 \\ AE^2 + DE^2 &= 17,64 + 31,36 \\ AE^2 + DE^2 &= 49 \end{aligned}$$

Conclusion : $AD^2 = AE^2 + DE^2$, d'après s la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ADE est rectangle en E.

3. Calculer la longueur FG.

- Données
  - ❏ Les points A, F, D et A, G, E sont alignés sur deux droites sécantes en A;
  - ❏ Les droites (FG) et (DE) sont parallèles .
- Le théorème
  Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{FG}{DE}$$

  Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{2,5}{7} = \frac{AG}{4,2} = \frac{FG}{5,6}$$

- Calcul de FG.
  On a donc

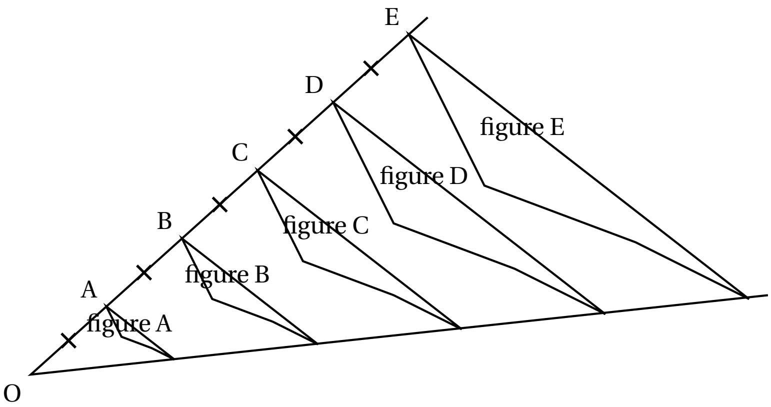
$$\frac{2,5}{7} = \frac{FG}{5,6}$$

  Puis

$$FG = \frac{2,5 \times 5,6}{7} = \underline{2 \text{ cm}}$$

Exercice 3. Homothéties — 3 points

Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.



1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A ?
Le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A est $k = 3$ puisque on a :

$$OC = 3 \times OA \Longrightarrow \boxed{k = \frac{OC}{OA} = 3}$$

2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ?

Si on applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E, alors le point E se transforme en le point E' tel que :

$$OE' = \frac{3}{5} \times OE = OC$$

Donc la figure E se transforme en la figure C.

3. Quelle figure a une aire 4 fois plus grande que la figure A ?

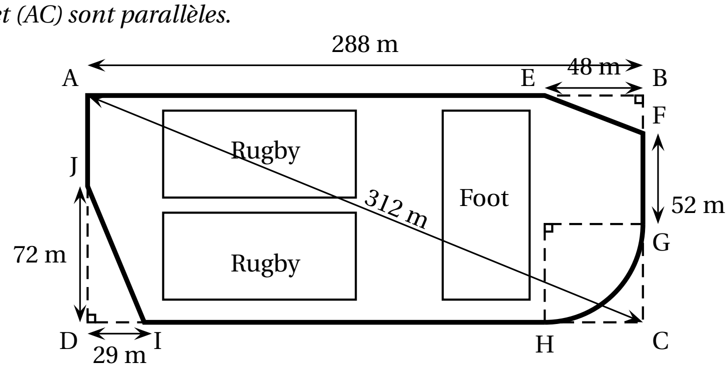
> **Agrandissement/réduction**
>
> Quand on multiplie les distances par un réel strictement positif k, les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3.

Donc ici, si une figure a une aire 4 fois plus grande que la figure A, ses dimensions ont été multipliées par $k' = 2$, car ainsi, les aires le sont par $k'^2 = 4$. De ce fait c'est la figure B qui a une aire 4 fois plus grande que la figure A puisque le rapport d'homothétie permettant de passer de la figure A à la figure B est :

$$k' = \frac{OB}{OA} = 2$$

Exercice 4. Une piste cyclable — 7 points

La ville BONVIVRE possède une plaine de jeux bordée d'une piste cyclable. La piste cyclable a la forme d'un rectangle ABCD dont on a « enlevé trois des coins ». Le chemin de G à H est un arc de cercle ; les chemins de E à F et de I à J sont des segments. Les droites (EF) et (AC) sont parallèles.



Quelle est la longueur de la piste cyclable ? Justifier la réponse. La piste cyclable est composée de plusieurs parties dont certaines ont des longueurs déjà connues. Notons L la longueur totale on a :

$$L = AE + EF + FG + 5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{GH}} + HI + IF + JA$$

On suppose ici que $EB = HC = 48$ m

- Longueur AE : puisque le point E appartient au segment [AB] on a

$$AE = AB - EB = 288 - 48 = 240 \text{ m}$$

- Calcul de EF.
  Dans le triangle ABC rectangle en B, les droites (EF) et (AC) sont parallèles, les points B, E, A d'une part, B, F, C de l'autre sont alignés ; d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{BE}}{\text{BA}} = \frac{\text{EF}}{\text{AC}} \text{ soit } \frac{48}{288} = \frac{\text{EF}}{312}$$

  d'où

$$EF = \frac{48 \times 312}{288} = \underline{52 \text{ m}}$$

- Longueur FG : on a $FG = 52$ m

- Calcul de l'arc $\overset{\frown}{GH}$.
  On suppose que $EB = HC = 48$ m. On pourra le redémontrer à la fin.
  L'arc $\overset{\frown}{GH}$ est un quart de cercle de rayon 48 ; sa longueur est donc :

$$\frac{2 \times 48 \times \pi}{4} = \underline{24\pi}$$

- Longueur HI : on a $HI = 288 - 29 - 48 = 211$ m

- Calcul de IJ .
  Dans le triangle DIJ rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}IJ^2 &= DI^2 + DJ^2\\ IJ^2 &= 72^2 + 29^2\\ IJ^2 &= 5184 + 841\\ IJ^2 &= 6025\end{aligned}$$

  Or IJ est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned}IJ &= \sqrt{6025}\\ IJ &\approx \underline{77{,}621\text{ m}}\end{aligned}$$

- Longueur AJ :
  - il nous faut calculer AD (ou BC) en appliquant par exemple Pythagore dans le triangle rectangle ADC.
    Dans le triangle DAC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}AC^2 &= DA^2 + DC^2\\ 312^2 &= DA^2 + 288^2\\ DA^2 &= 312^2 - 288^2\\ DA^2 &= 97344 - 82944\\ DA^2 &= 14400\end{aligned}$$

    Or DA est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned}DA &= \sqrt{14400}\\ DA &= \underline{120\text{ m}}\end{aligned}$$

  - et puisque le point J appartient au segment [AD] on a :

$$AJ = 120 - 72 = 48\text{ m}$$

- Conclusion : La longueur de la piste cyclable est donc égale à :

$$\begin{aligned}L &= AE + EF + FG + \widehat{GH} + HI + IF + JA\\ &= 240 + 52 + 52 + 24\pi + 211 + \sqrt{6025} + 48\\ L &= 603 + 24\pi + \sqrt{6025} \quad \text{(c'est la valeur exacte)}\\ L &\approx \underline{756\text{ m}}\end{aligned}$$

Fin du devoir