Math93.com

Devoir Surveillé n°1A
Troisième
Arithmétique
Durée 50 min - Coeff. 1
Noté sur 21 points

Exercice 1. Déjà vu ? — 11 points

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers en détaillant les calculs.

2. A l'aide de la question précédente, calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441. Expliquer.

3. Applications

3. a. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{756}{441}$ en expliquant votre raisonnement.

3. b. Olivia souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 756 cm et 441 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux carrés de même dimension sans découpe.

3. b. 1. Olivia peut-elle utiliser des carreaux de faïence 6 cm de côté ?

3. b. 2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Olivia peut poser ?
Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

Corrigé

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).

$$\begin{aligned}756 &= 2\times 378\\ &= 2\times 2\times 189\\ &= 2\times 2\times 3\times 63\\ &= 2\times 2\times 3\times 9\times 7\\ 756 &= \underline{2^2\times 3^3\times 7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}441 &= 3\times 147\\ &= 3\times 3\times 49\\ 441 &= \underline{3^2\times 7^2}\end{aligned}$$

2. Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :

$$\begin{cases}756 = 2^2\times \boxed{3\times 3}\times 3\times \boxed{7}\\ 441 = \boxed{3\times 3\times 7}\times 7\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}756 = \boxed{63}\times 12\\ 441 = \boxed{63}\times 7\end{cases} \Longrightarrow \underline{PGCD(441\ ;\ 756) = 63}$$

3. Applications

3. a. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{756}{441}$ en expliquant votre raisonnement.
On divise numérateur et numérateur de la fraction par leur PGCD pour la rendre irréductible :

$$\frac{756}{441} = \frac{756\div 63}{441\div 63} = \boxed{\frac{12}{7}}$$

3. b. *Olivia souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 756 cm et 441 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux carrés de même dimension sans découpe.*

3. b. 1. Olivia peut-elle utiliser des carreaux de faïence 6 cm de côté ?
La longueur du côté du carreau dit être un diviseur commun de 756 et 441.
Or 6 ne divise pas 441 puisque :

$$\begin{array}{r|l} 441 & 6 \\ \hline -42 & 73 \\ 21 & \\ -18 & \\ 3 & \end{array} \quad \text{soit} \quad 441 = 6 \times 73 + 3$$

3. b. 2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Olivia peut poser ? Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

La longueur du côté du carreau dit être un diviseur commun de 756 et 441 et on cherche le plus grand, c'est donc le PGCD des deux entiers que l'on a trouvé lors de la question 2) soit 63.
Il y aura donc 12 carreaux en longueur et 7 en largeurs soit en tout $12 \times 7 = 84$ carreaux.

Exercice 2. Une voyage — 3 points

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 180 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 25 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?

Corrigé

Le nombre total de voyageurs est de : $13 + 180 = 193$.
Puisque les bus ont 25 places maximum on va effectuer la division euclidienne de 193 par 25 :

$$193 = 25 \times 7 + 18$$

Il faudra donc prendre <u>8 bus</u>. Avec 7 bus qui seront remplis intégralement et un qui aura 18 passagers pour 25 places.

Exercice 3. Les voitures de nos grands mathématiciens — 3 points

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ d'un même circuit pour une course de 10 tours. La voiture A de Léopold fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B de Solène en 30 minutes.
Déterminer le premier moment (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?

Corrigé

On peut affirmer que les voitures se recroiseront sur la ligne de départ après un temps qui sera un multiple commun de 30 et de 36. On peut lister les multiples et ou effectuer les décomposition en facteurs premiers.

Nombre de tours	Voiture A : Multiples de 36	Voiture B : Multiples de 30
1 tour	36	30
2 tours	72	60
3 tours	108	90
4 tours	144	120
5 tours	$\boxed{180}$	150
6 tours	216	$\boxed{180}$

Les voitures se recroiseront sur la ligne de départ après 180 minutes, donc <u>après 3 heures</u>.

Exercice 4. Vrai ou faux — 4 points

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse(en justifiant)

Affirmation 1

Tess affirme « *Tous les nombres impairs sont premiers..* »

Corrigé

L'affirmation 1 est fausse puisque 9 est impair mais n'est pas premier. En effet 9 a plus de 2 diviseurs, qui sont : 1, 3 et 9

Affirmation 2

Aristoteles affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 7 et je multiplie le résultat par 5. J'ajoute le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 7.* »

Corrigé

Notons n le nombre entier naturel choisi au départ.

Étape 1	n
Étape 2	$n+7$
Étape 3	$5\times(n+7)$
Étape 4	$5\times(n+7)+2n$

On peut alors développer le résultat :

$$5\times(n+7)+2n = 5n+35+2n = \underline{7n+35}$$

On veut alors prouver que ce résultat est un multiple de 3. On cherche alors à écrire le résultat sous la forme 7 fois un entier.

$$7n+35 = 7\times(n+5)$$

Avec $(n+5)$ entier, donc le résultat obtenu est bien un multiple de 7. L'affirmation de Aristoteles est vraie.

Fin du devoir

Corrigé

Bonus

Soit n un nombre entier naturel.

La somme de 3 entiers consécutifs peut s'écrire :

$$S = (n-1)+n+(n+1) = 3\times n$$

Ce qui est bien un multiple de 3 car de la forme 3 fois un entier naturel.