Math93.com

Devoir Surveillé n°3
Correction

Troisième
Thalès
Durée 1 heure - Coeff. 1.2
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

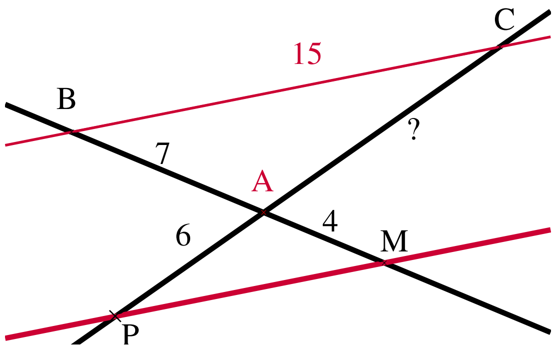
Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Application directe du cours — 2.5 points

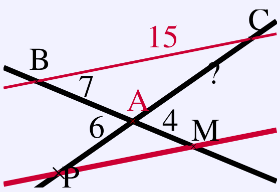
Dans la figure suivante, les droites (BM) et (PC) sont sécantes en A et les droites (BC) et (PM) sont parallèles.
On sait que :

$AB = 7\,\text{cm}$; $AM = 4\,\text{cm}$; $AP = 6\,\text{cm}$; $BC = 15\,\text{cm}$

Calculer la longueur AC.



Corrigé



- **Données**
  - ❏ Les points A, M, B et A, P, C sont alignés sur deux droites sécantes en A;
  - ❏ Les droites (BC) et (MP) sont parallèles .

- **Le théorème**
  Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{\boxed{A}M}{\boxed{A}B} = \frac{\boxed{A}P}{\boxed{A}C} = \frac{MP}{BC}$$

Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{AC} = \frac{MP}{15}$$

- **Calcul de AC** :

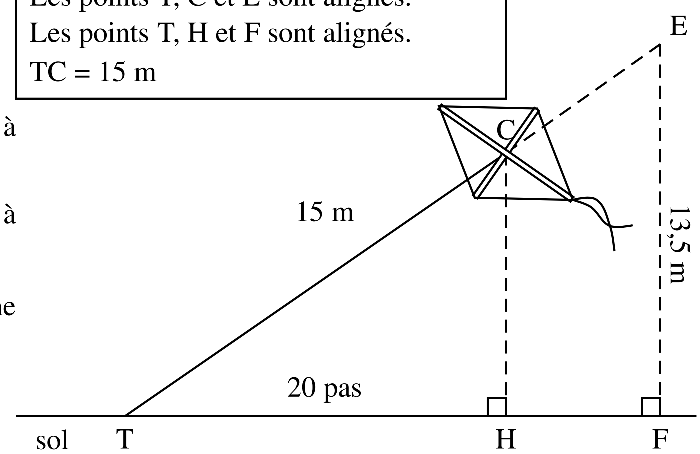
$$\frac{4}{7} = \frac{6}{AC} \underset{\text{par produit en croix}}{\Longrightarrow} AC = \frac{7 \times 6}{4}$$

$$\boxed{AC = \frac{42}{4} = 10,5 \text{ cm}}$$

Exercice 2. Un cerf-volant — 5 points

Thomas attache son cerf-volant au sol au point T.
Il fait 20 pas pour parcourir la distance TH.
Un pas mesure 0,6 mètre.
Le schéma ci-contre illustre la situation. Il n'est pas à l'échelle.

Les points T, C et E sont alignés.
Les points T, H et F sont alignés.
TC = 15 m

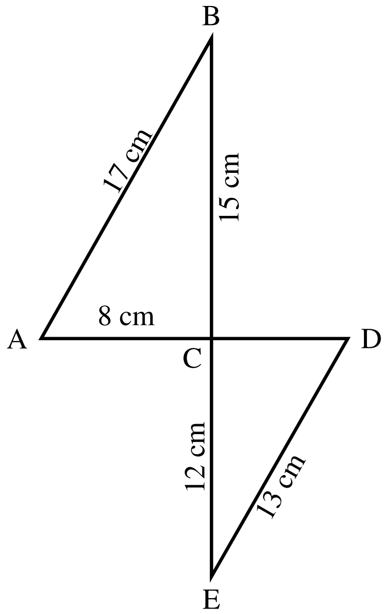


1. Montrer que la hauteur CH du cerf-volant est égale à 9 m.
2. Thomas souhaite que son cerf-volant atteigne une hauteur EF de 13,5 m.
   Calculer la longueur TE de la corde nécessaire.

Corrigé

1. **Montrer que la hauteur CH du cerf-volant est égale à 9 m.**
   On a $\text{TH} = 20 \times 0,6 = 12$ (m).
   Dans le triangle CTH rectangle en H le théorème de Pythagore s'écrit :
   $$\text{CT}^2 = \text{TH}^2 + \text{HC}^2$$
   ou
   $$15^2 = 12^2 + \text{HC}^2$$
   soit
   $$\text{HC}^2 = 15^2 - 12^2 = 81$$
   d'où puisque CH est positif, $\underline{\text{CH} = 9 \text{ m}}$.
2. **Thomas souhaite que son cerf-volant atteigne une hauteur EF de 13,5 m. Calculer la longueur TE de la corde nécessaire.**
   - Les droites (CH) et (EF) étant toutes deux perpendiculaires à la droite (TH) sont parallèles ;
   - Les points T, H, F et T, C, E sont alignés et les droites (HC) et (EF) parallèles.
   - D'après le théorème de Thalès :
   $$\frac{\text{EF}}{\text{CH}} = \frac{\text{TE}}{\text{CT}} \text{ soit } \frac{13,5}{9} = \frac{\text{TE}}{15}$$
   Soit $\text{TE} = 15 \times \dfrac{13,5}{9} = \underline{22,5 \text{ m}}$

Exercice 3. — 8.5 points



Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, le point C est le point d'intersection des droites (BE) et (AD).

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Calculer le périmètre du triangle CDE.
4. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

Corrigé

1. **Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.**
Si le triangle BAC est rectangle, c'est forcément en C car $[BA]$ est le plus grand côté. On a:

D'une part :		D'autre part :
$BA^2 = 17^2$	et	$BC^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2$
$BA^2 = 289$		$BC^2 + AC^2 = 225 + 64$
		$BC^2 + AC^2 = 289$

Conclusion : $BA^2 = BC^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BAC est rectangle en C.

2. **Calculer l'aire du triangle ABC.**
En prenant comme base [AC] et comme hauteur [BC], on a :

$$\mathcal{A}(\text{ACB}) = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{8 \times 15}{2} = 4 \times 15 = 60 \ \left(\text{cm}^2\right)$$

3. **Calculer le périmètre du triangle CDE.**
Puisque $\widehat{\text{ACB}}) = 90^\circ$, alors l'angle opposé $\widehat{\text{ECD}} = 90^\circ$: le triangle DCE est donc rectangle en C.
Dans le triangle CDE rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} DE^2 &= CD^2 + CE^2 \\ 13^2 &= CD^2 + 12^2 \\ CD^2 &= 13^2 - 12^2 \\ CD^2 &= 169 - 144 \\ CD^2 &= 25 \end{aligned}$$

Or CD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$CD = \sqrt{25}$$
$$CD = \underline{5\text{ cm}}$$

Le périmètre du triangle CDE est donc égal à :
$p = \text{DC} + \text{CE} + \text{ED} = 5 + 12 + 13 = 30\ (\text{cm})$.

4. Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

- **Le test, avec mise au même dénominateur.**

D'une part :

$$\frac{CA}{CD} = \frac{8}{5} = \frac{32}{20}$$

D'autre part :

$$\frac{CB}{CE} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = \frac{25}{20}$$

- **Données.**
  - Les points A, C, D et B, C, E sont alignés sur deux droites sécantes en C ;
  - On n'a pas égalité des rapports : $\dfrac{CA}{CD} \neq \dfrac{CB}{CE}$.
- **Conclusion.**
De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, Les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.

Exercice 4. Choisir une forme adaptée — 4 points

On considère l'expression

$$A(x) = (x+1)(2-x) - 3(x+1)^2$$

1. Développer et réduire $A(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (x+1)(2-x) - 3(x+1)^2 \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 3 \times \left(x^2 + 2x + 1\right) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 3x^2 - 6x - 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{A(x) = -4x^2 - 5x - 1}$$

2. Factoriser $A(x)$.

Corrigé

$$\begin{aligned}A(x) &= \boxed{\underline{(x+1)}\times(2-x)} - \boxed{3\times\underline{(x+1)}\times(x+1)}\\ &= \underline{(x+1)}\times\Big[(2-x)-3(x+1)\Big]\\ &= \underline{(x+1)}\times\Big[2-x-3x-3\Big]\end{aligned}$$

$$\boxed{A(x)=(x+1)(-4x-1)}$$

3. Calculer $A\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

Corrigé

La forme factorisée est :

$$A(x)=(x+1)(-4x-1)$$

$$\begin{aligned}A\left(-\frac{1}{4}\right) &= \left(-\frac{1}{4}+1\right)\left(-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1\right)\\ &= \left(-\frac{1}{4}+1\right)(1-1)\\ &= \left(-\frac{1}{4}+1\right)\times 0\end{aligned}$$

$$\boxed{A\left(-\frac{1}{4}\right)=0}$$

Fin du devoir

Question Bonus

Factoriser et développer l'expression :

$$B(x)=x^2-6x+9-4(x+1)^2$$

Corrigé

$$\begin{aligned}B(x) &= \boxed{(x-3)^2} - \boxed{\Big(2(x+1)\Big)^2}\\ &= \Big[(x-3)+2(x+1)\Big]\Big[(x-3)-2(x+1)\Big]\end{aligned}$$

$$\boxed{B(x)=(3x-1)(-x-5)}$$

$$B(x) = x^2 - 6x + 9 - 4(x+1)^2$$
$$B(x) = x^2 - 6x + 9 - 4(x^2 + 2x + 1)$$
$$\boxed{B(x) = -3x^2 - 14x + 5}$$