Math93.com

Devoir Surveillé n°5
Correction

Troisième
Bilan
Durée 100 min - Coeff. 2
Noté sur 82 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

*L'utilisation des **fiches de cours** est exceptionnellement autorisé pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient MANUSCRITES.*

Exercice 1. Arithmétique — 18 points

1. Justifier que le nombre 102 est divisible par 3.

Corrigé (2 points)

- Comme $1 + 0 + 2 = 3$, 102 est un multiple de 3 (critère de divisibilité par 3 ;

$$102 = 3 \times 34$$

102 est un multiple de 3, il est divisible par 3.

2. On donne la décomposition en produits de facteurs premiers de 68 :

$$68 = 2^2 \times 17$$

Décomposer 102 en produits de facteurs premiers en détaillant vos étapes.

Corrigé (3 points)

On a vu que $102 = 3 \times 34$.

$$\begin{aligned} 102 &= 3 \times 34 \\ &= 3 \times 2 \times 17 \\ &= 2 \times 3 \times 17 \end{aligned}$$

3. Donner 3 diviseurs non premiers du nombre 102.

Corrigé (3 points)

$2 \times 3 = 6$; $2 \times 17 = 34$; $3 \times 17 = 51$ sont trois diviseurs de 102 non premiers.

4. Donner le PGCD (Plus Grand Diviseur Commun) et le PPCM (Plus Petit Commun Multiple) de 68 et 102 en expliquant votre méthode.

Corrigé (4 points)

- PGCD

$$\begin{cases} 68 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{17} \\ 102 = \boxed{2} \times 3 \times \boxed{17} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 68 &= \boxed{34} \times 2 \\ 102 &= \boxed{34} \times 3 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 102 et 68 est donc 34.

- PPCM

$$\begin{cases} 68 &= \boxed{34} \times 2 \\ 102 &= \boxed{34} \times 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 68 \times 3 = 204 \\ 102 \times 2 = 204 \end{cases}$$

Le **Plus Petit Commun Multiple** des entiers 102 et 68 est donc 204.

Un libraire dispose d'une feuille cartonnée de 68 cm sur 102 cm.
Il souhaite découper dans celle-ci, en utilisant toute la feuille, des étiquettes carrées.
Les côtés de ces étiquettes ont tous la même mesure.

5. Les étiquettes peuvent-elles avoir 33 cm de côté ? Justifier.

Corrigé (3 points)

Si toute la feuille est utilisée c'est que la longueur et la largeur sont des multiples des côtés du carré.
Ces côtés ont donc une longueur c qui divise à la fois 102 et 68.

Or 33 ne divise pas 68 car $68 = 33 \times 2 + 2$.

Les étiquettes ne peuvent pas faire 33cm de côté.

6. Le libraire découpe des étiquettes de 17 cm de côté.
Combien d'étiquettes pourra-t-il découper dans ce cas ?

Corrigé (3 points)

Par contre 17 divise 68 ($68 = 4 \times 17$) et 17 divise 102 ($102 = 17 \times 6$).

Les étiquettes rentrent 4 fois en largeur et 6 fois en longueur : il y en aura donc $4 \times 6 = 24$ par feuille.

Exercice 2. Calcul littéral et fonction 14 points

Soit f la fonction définie pour tout nombre x par :

$$f(x) = (2-3x)^2 - (x+1)^2$$

1. Calculer l'image de 1 par f.
2. A l'aide du calcul précédent, recopier et compléter l'affirmation suivante :

Affirmation 1

- L'image de 1 par f est ....
- Donc $f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$.
- ..... est donc UN antécédent de ..... par la fonction f.

3. Développer et réduire $f(x)$.
4. En utilisant une factorisation, montrer que :

$$f(x) = (3-2x)(1-4x)$$

Corrigé

1. **[3 points]** L'image de 1 par f est $\boxed{f(1) = -3}$
2. **[3 points]** A l'aide ce ce calcul, recopier et compléter l'affirmation suivante :

Affirmation 2

- L'image de 1 par f est -3
- Donc $f(1) = -3$.
- 1 est donc UN antécédent de -3 par la fonction f.

3. **[4 points]** On développe et réduit $f(x)$ ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-3x)^2 - (x+1)^2 \\ f(x) &= 4 - 12x + 9x^2 - \left(x^2 + 2x + 1\right) \\ f(x) &= 4 - 12x + 9x^2 - x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 8x^2 - 14x + 3}$$

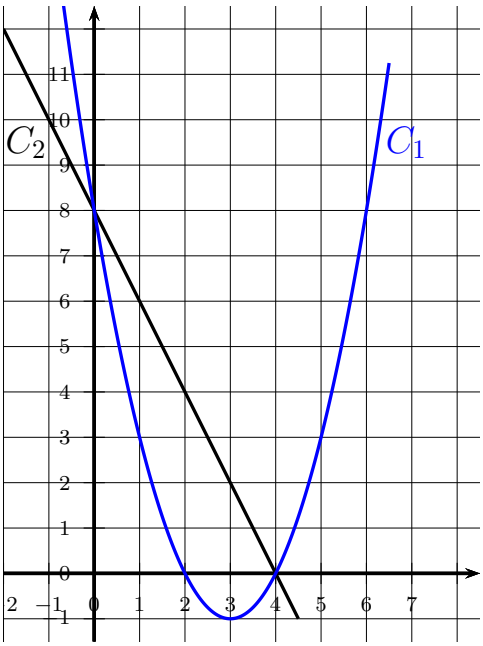
4. **[4 points]** En utilisant une factorisation, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-3x)^2 - (x+1)^2 \\ &= \Big((2-3x) - (x+1)\Big)\Big((2-3x) + (x+1)\Big) \\ &= \Big(2 - 3x - x - 1\Big)\Big(2 - 3x + x + 1\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (3-2x)(1-4x)}$$

Exercice 3. Fonctions et lectures graphiques 14 points

Les représentations graphiques C_1 et C_2 de deux fonctions sont données dans le repère ci-dessous.
Une de ces deux fonctions est la fonction f définie par $f(x) = -2x + 8$ et l'autre une fonction g.



1. Justifier que la fonction f est représentée par la courbe C_2.

2. Que vaut $f(3)$ (par le calcul) ?

3. Par lecture graphique et sans justification, déterminer $g(6)$.
On rappelle que la fonction g est représentée par la C_1.

4. Par lecture graphique et sans justification, déterminer les antécédents de 3 par g.

5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	3
2	$f(x)$						

La feuille de calcul ci-dessus est destinée à calculer des valeurs de la fonction f.
Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 avant de l'étirer vers la droite jusqu'à la cellule G2 afin d'obtenir ces valeurs ?

Corrigé

1. [3 points] Justifier que la fonction f est représentée par la courbe C_2.
On sait que les représentations graphiques C_1 et C_2 sont celles de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 8$ et l'autre d'une fonction g.

- Méthode 1 (pour plus tard).
  f est une fonction affine dont la représentation graphique est une droite qui est donc nécessairement la droite C_2.
- Méthode 2.
  L'image de 1 par f est $f(1) = -2 \times 2 + 8 = 6$. Or sur le graphique, seule la courbe C_2 passe par le point de coordonnées $(1\ ;\ 6)$, c'est donc la courbe représentative de f.

2. [3 points] Que vaut $f(3)$?

$$\boxed{f(3) = -2 \times 3 + 8 = -6 + 8 = 2}$$

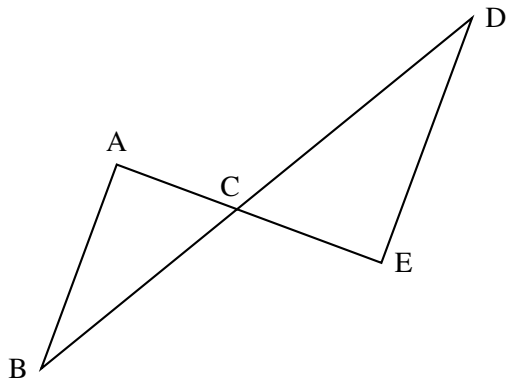
3. [2 point] Par lecture graphique, déterminer $g(6)$.
Par lecture graphique $\boxed{g(6) = 8}$.

4. **[3 points] Par lecture graphique, déterminer les antécédents de 3 par g.**
   Par lecture graphique, les antécédents de 3 par g sont 1 et 5.

5. **[3 points]** On peut écrire dans la cellule B2 : $\boxed{= 8 - 2 * B1}$.

Exercice 4. Un parcours 17 points

Dans cet exercice, les distances sont exprimées en mètres.
AB $= 400$, AC $= 300$, BC $= 500$ et CD $= 700$.



Les droites (AE) et (BD) se coupent en C

Les droites (AB) et (DE) sont parallèles

1. Calculer la longueur DE.

Corrigé (4 points)

Les droites (AB) et (DE) étant parallèles, les points A,C,E et B, C, D étant alignés, on peut écrire d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{DE}}{\text{AB}} = \frac{\text{CD}}{\text{BC}}$$

soit

$$\frac{\text{DE}}{400} = \frac{700}{500}$$

D'où

$$\boxed{\text{DE} = 400 \times \frac{700}{500} = 560 \text{ m}}$$

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Corrigé (4 pts)

On a

$$\begin{cases} BC^2 = 500^2 = 250\,000 \\ \text{AB}^2 + \text{AC}^2 = 400^2 + 300^2 = 16\,000 + 9\,000 = 250\,000 \end{cases}$$

On a donc $\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BC}^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$. Arrondir au degré.

Corrigé (4 pts)

Par définition du cosinus d'un angle aigu, dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\cos \widehat{\text{ABC}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\boxed{\widehat{\text{ABC}} = \arccos(0,8) \approx 37°}$$

Lors d'une course les concurrents doivent effectuer plusieurs tours du parcours représenté ci-dessus.
Ils partent du point A, puis passent par les points B, C, D et E dans cet ordre puis de nouveau par le point C pour ensuite revenir au point A.
La distance parcourue pour faire un tour est 2 880 m.
Evariste, le vainqueur, a mis 1 h 48 min pour effectuer les 5 tours du parcours.

4. Calculer la distance totale parcourue pour effectuer les 5 tours du parcours.

Corrigé (1 pt)

Les 5 tours représentent donc une longueur de $5 \times 2\,880 = 14\,400$ (m) ou 14,4 (km).

5. Calculer la vitesse moyenne d'Evariste en km/h. Arrondir au dixième.

Corrigé (4 pts)

On a :

$$1 \text{ h } 48 \text{ min} = 60 + 48 = 108 \text{ min} = \frac{108}{60} \text{ h} = 1{,}8 \text{ h}.$$

La vitesse moyenne est égale au quotient de la distance parcourue par le le temps mis pour faire les 5 tours :

$$v = \frac{14\,400 \text{ m}}{108 \text{ min}} = \frac{14,400 \text{ km}}{1,8 \text{ h}}$$

Soit

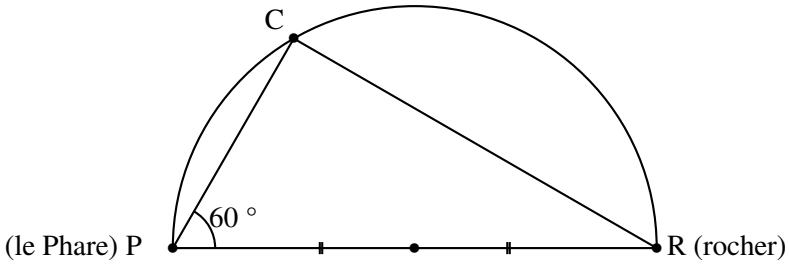
$$\boxed{v = 8 \text{ km/ h}}$$

La vitesse moyenne de Maltéo, arrondie à l'unité est de 8 (km/h).

Exercice 5. A vos pelles 6 points

Voici une carte découverte par Ruffy qui lui permettra de déterrer le fabuleux trésor de Math le Pirate. On note :

- R le roche en forme de crâne, C le cocotier sous lequel est enterré le trésor
- P le phare et C est sur le demi-cercle de diamètre [PR]



La distance du phare au rocher en forme de crâne est de 5 000 brasses.

Aidez-le à mettre la main sur le butin :

1. Démontrer que le triangle PRC est un triangle rectangle (bonus).

Corrigé (2 points)

Le triangle PRC est inscrit dans un demi-cercle qui admet pour diamètre l'un de ses côté : il est donc rectangle en C, d'hypoténuse [RP].

2. Calculer la distance RC en brasses (arrondir à l'unité).

Corrigé (4 points)

Le triangle PRC est un triangle rectangle en C, donc on a :

$$\sin \widehat{\text{PRC}} = \frac{RC}{PR} \iff \sin(60°) = \frac{RC}{5000}$$

Soit

$$RC = 5\,000 \times \sin(60°) \approx \underline{4\,330 \text{ brasses}} \text{ (arrondi à l'unité)}$$

Exercice 6. Un peu de statistiques pour finir 13 points

Voici les résultats d'une enquête auprès des 800 élèves d'un collège sur leur fréquentation du restaurant scolaire par semaine.

Nombres de repas	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Effectifs	120	144	80	148	192	116	800
Effectifs cumulés croissants	120	264	344	492	684	800	

1. Déterminer la médiane de cette série statistique.

Corrigé (3 pts)

Il y a 800 valeurs (800 est un entier pair) donc une médiane est une valeur comprise entre la 400e et la 401e valeur de cette série statistique.

La 400e valeur est 3 et la 401e aussi donc la médiane de la série est 3.

Interpréter le résultat pour cette situation.

Corrigé (2 pts)

La médiane de la série est 3 donc au moins 50% des élèves prennent 3 repas ou plus par semaine au moins 50% des élèves prennent 3 repas ou moins par semaine.

2. Calculer le pourcentage d'élèves qui prennent au moins 3 repas par semaine.

Corrigé (3 pts)

Sur 800 élèves, le nombre de ceux qui prennent 3 repas ou plus (donc au moins 3 repas) par semaine est :

$$148 + 192 + 116 = 456$$

Ce qui donne en pourcentage :

$$\boxed{\frac{456}{800} = 0,57 = 57\% \geqslant 50\%}$$

3. Calculer l'étendue de cette série statistique.

Corrigé (2 pts)

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur.

Ce qui nous donne ici un étendue de :

$$\boxed{e = 5 - 0 = 5}$$

4. Calculer la moyenne de cette série statistiques.

Corrigé (3 pts)

La moyenne est :

$$m = \frac{0 \times 120 + 1 \times 144 + \cdots + 5 \times 116}{800} = \frac{2096}{800} = 2,62$$

En moyenne, les élèves prennent 2,62 repas par semaine.

Fin du devoir

Question Bonus

Soit la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = x^2 - 10x + 26$$

Monsieur Conjecturos affirme que pour tous les nombres réels, l'expression $f(x)$ est toujours strictement positive. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
Aide : $26 = 25 + 1$ ...

Corrigé