

TD : Factorisation canonique

La factorisation canonique est une méthode qui permet de factoriser des expressions (trinôme) du type : $\boxed{ax^2 + bx + c, (avec\ a \neq 0)}$.

Algorithme et exemple avec le trinôme : $F(x) = x^2 - 6x + 5$

1. Si $\boxed{a \neq 1}$, on factorise par a.

Ici a, le coefficient devant x^2 vaut 1, donc rien à faire.

2. On cherche à écrire les 2 premiers termes (en x^2 et x) sous forme de carré

$$F(x) = \boxed{x^2 - 6x} + 5$$

On cherche donc à écrire

$$(\dots - \dots)^2 = \boxed{x^2 - 6x} + \dots$$

Soit

$$(x - 3)^2 = \boxed{x^2 - 6x} + 9$$

Et donc

$$\boxed{(x - 3)^2 - 9 = x^2 - 6x}$$

3. On remplace alors dans l'expression de départ.

$$F(x) = \boxed{x^2 - 6x} + 5$$

$$F(x) = \boxed{(x - 3)^2 - 9} + 5$$

$$\boxed{F(x) = (x - 3)^2 - 4}$$

4. On cherche alors à factoriser en utilisant la 3^{ème} identité remarquable (quand c'est possible) : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

Ici on factorise avec : $A = (x - 3)$ et $B = 2$ En effet

$$F(x) = (x - 3)^2 - 2^2$$

$$F(x) = ((x - 3) + 2)((x - 3) - 2)$$

$$\boxed{F(x) = (x - 1)(x - 5)}$$

Ce qui nous donne une forme factorisée de F

5. Vérification : On peut alors redévelopper l'expression obtenue pour vérifier le résultat.

$$\begin{aligned}(x - 1)(x - 5) &= x^2 - 5x - x + 5 \\ &= x^2 - 6x + 5 \\ &= F(x)\end{aligned}$$

Exercice 1.

A l'aide d'une factorisation canonique, montrer les égalités suivantes.

1. $A(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$
2. $B(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$
3. $C(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$
4. $D(x) = x^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6)$
5. $E(x) = x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
6. $F(x) = 2x^2 - 8x - 10 = 2(x - 5)(x + 1)$
7. $G(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x + 1)(x - 2)$
8. $H(x) = 5x^2 + 15x + 10 = 5(x + 1)(x + 2)$
9. $I(x) = 5x^2 - 5x + \frac{5}{4} = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
10. $J(x) = 6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Exercice 2.

La factorisation canonique n'aboutit pas toujours. En effet, à la fin de l'étape 3, on obtient parfois une expression du type $(A^2 + B^2)$, et qui n'est pas (à notre niveau) factorisable.

A l'aide d'une factorisation canonique, montrer les égalités suivantes.

1. $K(x) = x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$
2. $L(x) = x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5$
3. $M(x) = 2x^2 - 8x + 10 = 2((x - 2)^2 + 1)$
4. $N(x) = x^2 + 8x + 21 = (x + 4)^2 + 5$
5. $O(x) = 2x^2 + 12x + 19 = 2\left((x + 3)^2 + \frac{1}{2}\right)$

Exercice 3.

On considère l'expression : $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. A l'aide d'un développement, montrer que :
$$P(x) = (x - 3)(x^2 + x - 2)$$
2. Factoriser le trinôme $(x^2 + x - 2)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
3. En déduire que la factorisation de $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Exercice 4.

On considère l'expression : $Q(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30$

1. Factoriser le trinôme $R(x) = (x^2 + 3x + 2)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
2. Factoriser le trinôme $S(x) = (x^2 - 2x - 15)$ à l'aide d'une factorisation canonique.
3. Montrer que : $Q(x) = R(x) \times S(x)$
4. En déduire alors la factorisation de $Q(x) = (x - 5)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.