Math93.com

TD 1 - Troisième
Arithmétique au Brevet

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 1. Vrai ou Faux : D'après Brevet (c)

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

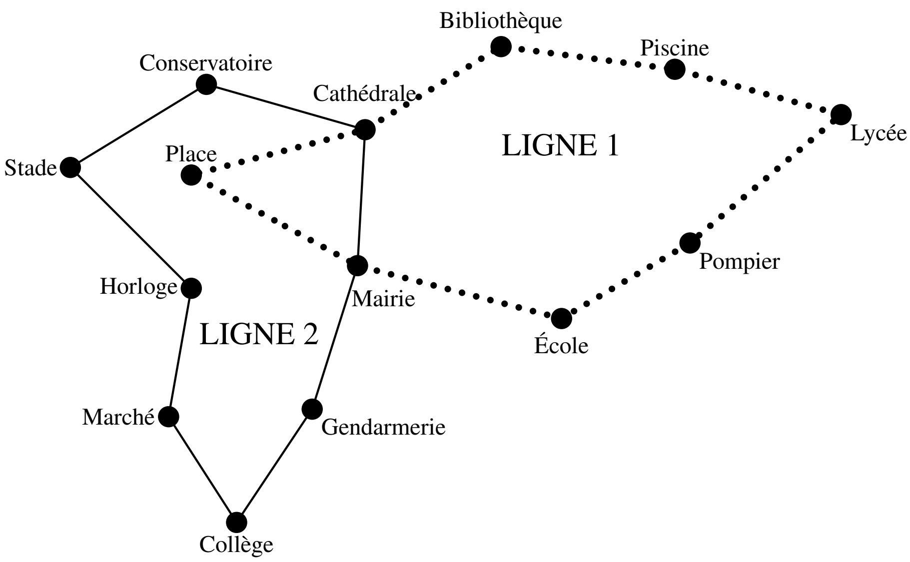
1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.
3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.
4. **Affirmation 4** : Tous les nombres premiers sont impairs.
5. **Affirmation 5** : Tous les nombres impairs sont premiers.

Exercice 2. Multiple de 10 : D'après Brevet 2014 Pondichéry. (c)

« *Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10.* » Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 3. Brevet 2017, Polynésie

Voici le plan de deux lignes de bus :



C'est à 6 h 30 que les deux bus des lignes 1 et 2 partent de l'arrêt « Mairie » dans le sens des aiguilles d'une montre. Le bus de la ligne 1 met 3 minutes entre chaque arrêt (temps de stationnement compris), tandis que le bus de la ligne 2 met 4 minutes. Tous les deux vont effectuer le circuit complet un grand nombre de fois. Ils s'arrêteront juste après 20 h.
Est-ce que les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps ? Si oui, donner tous les horaires précis de ces rencontres.

Réponses
Le corrigé sur www.math93.com

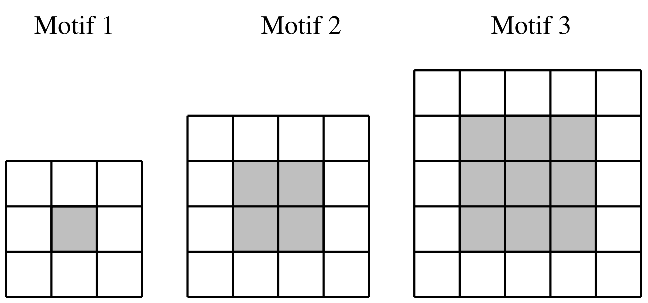
Exercice 4. D'après Brevet (c)

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?
2. Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?
3. On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?

Exercice 5. Brevet 2017, Asie

Gaspard réalise des motifs avec des carreaux de mosaïque blancs et gris de la façon suivante :



Gaspard forme un carré avec des carreaux gris puis le borde avec des carreaux blancs.

1. Combien de carreaux blancs Gaspard va-t-il utiliser pour border le carré gris du motif 4 (un carré ayant 4 carreaux gris de côté) ?
2.
   2. a. Justifier que Gaspard peut réaliser un motif de ce type en utilisant exactement 144 carreaux gris.

   2. b. Combien de carreaux blancs utilisera-t-il alors pour border le carré gris obtenu ?
3. On appelle « motif n » le motif pour lequel on borde un carré de n carreaux gris de côté.

   Trois élèves ont proposé chacun une expression pour calculer le nombre de carreaux blancs nécessaires pour réaliser le « motif n » :

   - Expression n° 1 : $2 \times n + 2 \times (n + 2)$
   - Expression n° 2 : $4 \times (n + 2)$
   - Expression n° 3 : $4 \times (n + 2) - 4$

   Une seule de ces trois expressions ne convient pas. Laquelle ?

Réponses
Le corrigé sur www.math93.com

Exercice 6. D'après Brevet, Amérique Sud (c)

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 cm et 225 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.

1. Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté ? De 6 cm de côté ?
2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser ?

   Combien de carreaux utilisera-t-elle ?

Exercice 7. D'après Brevet (c)

1. Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).
2. Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.
3. Rendre alors irréductible la fraction $\frac{756}{441}$.

Exercice 8. Une voyage (c)

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?

Exercice 9. Les voitures (c)

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?

Exercice 10. Multiple de 3 ? (c)

Affirmation 1

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.

Corrections

Correction de l'exercice 1

- **Affirmation 1 : Vraie**
  - Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 ;
  - Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18 ;
  - Les diviseurs communs à 12 et 18 sont donc 1, 2, 3 et 6 et ce sont aussi les diviseurs de 6
  - Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.
- **Affirmation 2 : Fausse**
  4 admet trois diviseurs distincts : 1, 2 et 4.
- **Affirmation 3 : Fausse**
  3 et 9 sont impairs et pourtant leurs diviseurs communs sont 1 et 3. Donc l'affirmation 3 est fausse.
- **Affirmation 4 : Fausse** : Tous les nombres premiers sont impairs.
  Par exemple 2 est premier car il n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même et pourtant il est pair. Donc l'affirmation 4 est fausse.
- **Affirmation 5 : Fausse** : Tous les nombres impairs sont premiers.
  Par exemple 9 est impair mais n'est pas premier car il a plus de 2 diviseurs qui sont : 1, 3 et 9. Donc l'affirmation 5 est fausse.

Correction de l'exercice 2

On peut, en partant d'un nombre quelconque noté x, écrire les différentes étapes de cet algorithme :

Étape 1	x	choix du nombre
Étape 2	$x+3$	on ajoute 3
Étape 3	$7\times(x+3)$	on multiplie par 7
Étape 4	$7\times(x+3)+3x$	on ajoute le triple de x
Étape 5	$7\times(x+3)+3x-21$	on retranche 21

L'algorithme conduit, en partant de x, au nombre

$$7\times(x+3)+3x-21$$

qui après développement s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}7\times(x+3)+3x-21 &= 7x+21+3x-21\\ &= 10x\end{aligned}$$

On **obtient bien un multiple de 10, l'affirmation est donc vraie**.

Correction de l'exercice 4

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. **Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?**
   La taille d'un carreau doit être un diviseur commun de 240 et 360.
   - Les entiers 240 et 360 sont divisibles par 10 car leur chiffre des unités est 0. On peut donc utiliser des carreaux de 10 cm de côté.
   - Les entiers 240 et 360 ne sont pas divisibles par 14. En effet :

     $$240 = 14\times 13+58 \text{ et } 360 = 14\times 25+10$$

     On ne peut pas utiliser de carreaux de 14 cm de côté.
   - L'entier 240 n'est pas divisible par 18. En effet $240 = 18\times 13+6$. On ne peut pas utiliser de carreaux de 18 cm de côté.

2. **Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?**
   On cherche les entiers naturels compris entre 10 et 20 diviseurs de 240 et 360.

   - Pour 10 on a : déjà traité à la question 1. 10 convient.
   - Pour 11 on a : $240 = 11 \times 21 + 9$ donc 11 ne convient pas.
   - Pour 12 on a : $240 = 20 \times 12$ et $360 = 30 \times 12$. 12 convient.
   - Pour 13 on a : $240 = 13 \times 18 + 6$. 13 ne convient pas.
   - Pour 14 on a : : déjà traité à la question 1. . 14 ne convient pas.
   - Pour 15 on a : : $240 = 15 \times 16$ et $360 = 15 \times 24$. 15 convient.
   - Pour 16 on a : $360 = 16 \times 22 + 8$. 16 ne convient pas.
   - Pour 17 on a : $240 = 17 \times 14 + 2$. 17 ne convient pas.
   - Pour 18 on a : déjà traité à la question 1. 18 ne convient pas.
   - Pour 19 on a : : $240 = 19 \times 12 + 12$. 19 ne convient pas.
   - Pour 20 on a : $240 = 20 \times 12$ et $360 = 20 \times 18$. 20 convient.

   On peut donc utiliser des carreaux dont les côtés mesurent 10 cm, 12 cm, 15 cm ou 20 cm.

3. **On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?**
   On peut mettre 16 carreaux pour couvrir 240 cm. Il faut donc 32 carreaux pour couvrir les deux côtés de même dimensions. Les quatre coins sont donc carrelés. Il ne faut donc que 22 carreaux pour couvrir l'autre dimension. On a donc besoin de 32+22+22=76 carreaux.

Correction de l'exercice 6

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 *cm et* 225 *cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.*

1. **Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté ? De 6 cm de côté ?**
   La taille d'un carreau doit être un diviseur commun de 108 et 225.

   - 3 divise 108 et 225 donc Carole peut utiliser des carreaux de 3 cm de côté.
   $$108 = 3 \times 36 \text{ et } 225 = 3 \times 75$$
   - 6 divise 108 mais pas 225 donc Carole ne peut pas utiliser des carreaux de 6 cm de côté.
   $$108 = 3 \times 186 \text{ et } 225 = 6 \times 37 + 3$$

2. **Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser ? Combien de carreaux utilisera-t-elle ?**

   - La taille N d'un carreau doit être un diviseur commun de 108 et 225. Or on cherche le plus grand possible, donc le PGCD de 108 et 225.
   Pour le déterminer, on écrit la décomposition de 108 et 225 en facteurs premiers, et on extrait les facteurs communs.
   $$\begin{cases} 108 & = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ 225 & = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 108 & = 2 \times 2 \times \boxed{3 \times 3} \times 3 \\ 225 & = \boxed{3 \times 3} \times 5 \times 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 108 & = \boxed{9} \times 12 \\ 225 & = \boxed{9} \times 25 \end{cases}$$
   Le Plus Grand Diviseur Commun des entiers 108 et 225 est donc 9.
   La dimension maximale des carreaux que Carole peut poser est donc de 9 cm.
   - **Combien de carreaux utilisera-t-elle ?**
   Elle utilisera donc 12 carreau en largeur et 25 en longueur soir au total : $12 \times 25 = 300$ carreaux.

Correction de l'exercice 7

1. **Décomposez les entiers 756 et 441 en produit de facteurs premiers (détaillez les calculs).**

$$\begin{aligned}756 &= 2\times 378\\ &= 2\times 2\times 189\\ &= 2\times 2\times 3\times 63\\ &= 2\times 2\times 3\times 9\times 7\\ 756 &= \underline{2^2\times 3^3\times 7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}441 &= 3\times 147\\ &= 3\times 3\times 49\\ 441 &= \underline{3^2\times 7^2}\end{aligned}$$

2. **Calculer le plus grand commun diviseur de 756 et 441.**
On va effectuer le produit des facteurs premiers communs à 441 et 756 :

$$\begin{cases}756 = 2^2\times \boxed{3\times 3}\times 3\times \boxed{7}\\ 441 = \boxed{3\times 3\times 7}\times 7\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}756 = \boxed{63}\times 12\\ 441 = \boxed{63}\times 7\end{cases} \Longrightarrow \underline{PGCD(441\ ;\ 756) = 63}$$

3. **Rendre alors irréductible la fraction $\mathbf{\dfrac{756}{441}}$.**
On divise numérateur et numérateur de la fraction par le PGCD pour la rendre irréductible :

$$\frac{756}{441} = \frac{756\div 63}{441\div 63} = \boxed{\frac{12}{7}}$$

Correction de l'exercice 8

Pour un voyage scolaire, 13 professeurs doivent accompagner 154 élèves d'un collège. Le déplacement doit s'effectuer dans des bus de 24 places maximum. Combien de bus seront nécessaires ?
Le nombre total de voyageurs est de : $13 + 154 = 167$.
Puisque les bus ont 24 places maximum on va effectuer la division euclidienne de 167 par 24 :

$$167 = 24\times 6 + 23$$

Il faudra donc prendre <u>7 bus</u>. Avec 6 bus qui seront remplis intégralement et un qui aura 23 passagers pour 24 places.

Correction de l'exercice 9

La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes. Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
On peut affirmer que les voitures se recroiseront sur la ligne de départ après un temps qui sera un multiple commun de 30 et de 36. On peut lister les multiples et ou effectuer les décomposition en facteurs premiers.

Nombre de tours	**Voiture A : Multiples de 36**	**Voiture B : Multiples de 30**
1 tour	36	30
2 tours	72	60
3 tours	108	90
4 tours	144	120
5 tours	$\boxed{180}$	150
6 tours	216	$\boxed{180}$

Les voitures se recroiseront sur la ligne de départ toutes les 180 minutes, donc <u>toutes les 3 heures</u>.
Remarque : Ne sachant pas la durée de la course, on ne peut rien affirmer de plus. Si la course est limitée en temps, moins de 3 heures par exemple, elles ne se recroiseront pas sur la ligne de départ.

Correction de l'exercice 10 page 3

Affirmation 2

Nory affirme « *Je prends un nombre entier naturel. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 5. J'enlève le double du nombre de départ au résultat. J'obtiens toujours un multiple de 3.* »

Est-ce vrai ? Justifier.

Notons n le nombre entier naturel choisi au départ.

Étape 1	n
Étape 2	$n+3$
Étape 3	$5\times(n+3)$
Étape 4	$5\times(n+3)-2n$

On peut alors développer le résultat :

$$5\times(n+3)-2n = 5n+15-2n = \underline{3n+15}$$

On veut alors prouver que ce résultat est un multiple de 3, il faut appliquer la définition du cours :

Définition 1 (Multiple et diviseur)

- Un nombre entier $\boldsymbol{a}$ **est un multiple** d'un nombre entier b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que $\boldsymbol{b}$ **est un diviseur de** $\boldsymbol{a}$ ou que a est divisible par b.
- Si l'entier b divise l'entier a il existe donc un entier q tel que : $a = b\times q$.

On cherche alors à écrire le résultat sous la forme 3 fois un entier.

$$3n+15 = 3\times(n+5)$$

Avec $(n+5)$ entier, donc le résultat obtenu est bien un multiple de 3. L'affirmation de Nory est vraie.