Math93.com

TD 4 - Troisième
Compléments : Calcul littéral

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Identités remarquables

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Exercice 1. Identités remarquables (c)

Compléter les égalités suivantes :

1. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 2x + \ldots\ldots.$
2. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 4x + \ldots\ldots.$
3. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 8x + \ldots\ldots.$
4. $(2x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + 4x + \ldots\ldots.$
5. $(3x + \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots + 12x + \ldots\ldots.$
6. $(x - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - 10x + \ldots\ldots.$
7. $(x - \ldots\ldots)(x + \ldots\ldots) = \ldots\ldots - 4.$
8. $(x - \ldots\ldots)(x + \ldots\ldots) = \ldots\ldots - 49.$
9. $(\ldots\ldots - 3)(\ldots\ldots + 3) = 4x^2 - \ldots\ldots.$

Exercice 2. Développer des identités remarquables(c)

Développer les expressions suivantes directement :

1. $(x-1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $(x+7)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $(x+5)(x-5) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $(1-3x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $(2x-3)(2x+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $(3x-2)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $(8-x)(x+8) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $(-1+x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9. $(-2+5x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 3. Factoriser des identités remarquables (c)

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 - 2x + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $x^2 + 12x + 36 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
3. $x^2 - 16 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $4x^2 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. $25x^2 + 20x + 4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. $x^2 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
7. $x^2 - 6x + 9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
8. $1 - 8x + 16x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
9. $9 - 100x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Deuxième partie

Quelques techniques algébriques

Exercice 4. Factorisations

Montrer avec une factorisation les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x-3)(1-4x)-(2x-3)^2=\underline{(2x-3)(-6x+4)}$$

2. Montrer que :

$$(2x-3)^2-(x+1)^2=\underline{(x-4)(3x-2)}$$

3. Montrer que :

$$(x+1)^2-(x-1)^2=\underline{4x}$$

Exercice 5. Équation après factorisation

Résoudre les équations suivantes après avoir factorisé l'expression initiale.

1. Résoudre l'équation (E_1) :

$$x^2-9=0$$

2. Résoudre l'équation (E_2) :

$$x^2-2x+1=0$$

3. Résoudre l'équation (E_3) :

$$(2x+1)^2=(x-3)^2$$

4. Résoudre l'équation (E_4) :

$$4x^2-8=0$$

Réponses

$S_1=\{-2\ ;\ 3\}$, $S_2=\{1\}$, $S_3=\left\{-4\ ;\ \dfrac{2}{3}\right\}$, $S_4=\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\}$.

Exercice 6. D'après Brevet

On considère l'expression

$$B(x)=5x+10-(x+2)^2$$

1. Factoriser $5x+10$.

2. En déduire une factorisation de $B(x)$.

3. Développer $B(x)$.

4. Calculer $B(-1)$,
c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par -1.

Exercice 7. D'après Brevet

Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par x un nombre positif et on a : $BC=x+7\ ;\ AB=5$.
Prouver que : $AC^2=x^2+14x+24$.

Exercice 8. Développements délicats

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x-3)^2 - 3(x+1)(2-5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x+1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$

Exercice 9. Astuces et fourberies ! (c)

Astuces

- Ne pas confondre

$$\boxed{(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{3x^2 = 3 \times x \times x = 3 \times (x^2)}$$

- Ne pas confondre

$$\boxed{(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{-x^2 = -(x \times x) = -(x^2)}$$

- On a par ailleurs :

  ✓ $\boxed{(-a-b)^2 = (a+b)^2}$

  car $(-a-b)^2 = \Big(-1 \times (a+b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a+b)^2 = (a+b)^2$.

  ✓ $\boxed{(-a+b)^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2}$

  car $(-a+b)^2 = \Big(-1 \times (a-b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a-b)^2 = (a-b)^2$.

Exemple

- $(-3x+1)^2 = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- $(-3x-1)^2 = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4x)^2 = (4x)^2 = 16x^2 \geqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 = -(x)^2 = -\left(x^2\right) \leqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \geqslant 0$

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x-3)^2$

1. b. $A_2(x) = x - (-2x+5)^2$

1. c. $A_3(x) = (-x-1)^2 - (-x+2)^2$

1. d. $A_4(x) = -(-x+1)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x+4)^2 - (x+2)(x+3)$

2. b. $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x+2)(x+3)$

2. c. $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x+3)(x+1)$

2. d. $B_4(x) = x^2 + 2x - 3$

Astuce : $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4$

Troisième partie

Choisir une forme adaptée

Ces exercices sont à la base des compétences attendues en classe de seconde.

Exercice 10. Choisir une forme adaptée de $B(x)$

On considère l'expression
$$B(x) = (2x+1)^2 - (1-x)^2$$

1. Montrer que :
$$B(x) = 3x^2 + 6x$$

2. En factorisant, montrer que :
$$B(x) = 3x(x+2)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $B(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $B(2)$, c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Calculer $B(-1)$ et $B\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

5. Équations

5. a. Résoudre en utilisant la forme factorisée l'équation : $B(x) = 0$.

5. b. Résoudre l'équation $B(x) = -3$.

5. c. Résoudre l'équation $B(x) = 6x$.

5. d. Résoudre l'équation $B(x) = 3x^2$.

5. e. Résoudre l'équation $B(x) = 6x + 3$.

Réponses

$B(2) = 24$, $B(-1) = -3$ *et* $B\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{3}$, $B(x) = 0 \iff x = 0 \;\; ou \;\; x = -2$, $B(x) = 6x \iff x = 0$, $B(x) = -3 \iff x = -1$, $B(x) = 3x^2 \iff x = 0$, $B(x) = 6x + 3 \iff x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$.

Exercice 11. Choisir une forme adaptée de $A(x)$

On considère l'expression
$$A(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer que :
$$A(x) = -5x^2 - 9x - 4$$

2. En factorisant, montrer que :
$$A(x) = (x+1)(-5x-4)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Calculer $A(-1)$ et $A\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

5. Équations

5. a. Résoudre en utilisant la forme factorisée l'équation : $A(x) = 0$.

5. b. Résoudre l'équation $A(x) = -4$.

5. c. Résoudre l'équation $A(x) = -9x - 4$.

5. d. Résoudre l'équation $A(x) = -5x^2$.

5. e. Résoudre l'équation $A(x) = -9x - 9$.

Réponses

$A(2) = -42$, $A(-1) = 0$ *et* $A\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{9}$, $A(x) = 0 \iff x = -1 \;\; ou \;\; x = -\dfrac{4}{5}$, $A(x) = -4 \iff x = 0 \;\; ou \;\; x = -\dfrac{9}{5}$,
$A(x) = -9x - 4 \iff x = 0$, $A(x) = -5x^2 \iff x = -\dfrac{4}{9}$, $A(x) = -9x - 9 \iff x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$.

Exercice 12. Choisir une forme adaptée (c)

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer en développant que : $f(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$.
2. Montrer à l'aide d'une factorisation que : $f(x) = (1-2\,x)\ (x-2)$.
3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = -2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{8}$.

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$.
2. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

   3. a. $(E_1) : f(x) = 0$;
   3. b. $(E_2) : f(x) = \dfrac{9}{8}$;
   3. c. $(E_3) : f(x) = (x-2)$.
4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

Exercice 13. Choisir une forme adaptée (c)

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)(3-5x) - (6x-4)(-x-2)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer que : $f(x) = x^2 + x - 2$.
2. Montrer que : $f(x) = (x-1)(x+2)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f(0)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f(1)$.
2. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

   3. a. $(E_1) : f(x) = 0$;
   3. b. $(E_2) : f(x) = -\dfrac{9}{4}$;
   3. c. $(E_3) : f(x) = -2$.
4. Déterminer le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.

Exercice 14. Choisir une forme adaptée (c)

On définie une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-3)(2+3x) - (2x-5)(x-3)$$

1. **Écrire et transformer** :

1. a. Par un développement, montrer que :

$$f(x) = x^2 + 4x - 21$$

1. b. Par une factorisation, montrer que :

$$f(x) = (x-3)(x+7)$$

1. c. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = (x+2)^2 - 25$$

1. d. ***Astuce*** *: développer les expressions obtenues aux questions 1b) et 1c) pour vérifier que vous obtenez bien le résultat du développement du 1a).*

2. **Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes** :

2. a. Montrer que $f(0) = -21$, $f(-2) = -25$, $f(3) = 0$;

2. b. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- (E_1) l'équation : $f(x) = 0$;
- (E_2) l'équation : $f(x) = -21$;
- (E_3) l'équation : $f(x) = -25$.

2. c. Déterminer le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint ;

2. d. Résoudre dans $\mathbb{R}$

- (E_4) l'équation : $f(x) = 4x$;
- (E_5) l'équation : $f(x) = x^2$.

2. e. Calculer les images de $\sqrt{2}$ puis de $\dfrac{-2}{3}$ par f.

2. f. Calculer les antécédents de -9 par f.

Quatrième partie
Correction

Correction de l'exercice 1 page1

Réponses

$(x-1)^2 = x^2-2x+1$, $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, $(x-4)^2 = x^2-8x+16$, $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$, $(3x+2)^2 = 9x^2+12x+4$
$(x-5)^2 = x^2-10x+25$, $(x-2)(x+2) = x^2-4$, $(x-7)(x+7) = x^2-49$, $(2x-3)(2x+3) = 4x^2-9$.

Correction de l'exercice 2 page1

Réponses

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$, $(x+7)^2 = x^2+14x+49$, $(x+5)(x+5) = x^2-25$, $(1-3x)^2 = 1-6x+9x^2$
$(2x-3)(2x+3) = 4x^2-9$, $(3x-2)^2 = 9x^2-12x+4$, $(8-x)(x+8) = 64-x^2$, $(-1+x)^2 = x^2-2x+1$,
$(-2+5x)^2 = 25x^2-20x+4$.

Correction de l'exercice 3 page1

Réponses

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$, $(x+6)^2 = x^2+12x+36$, $(x-4)(x+4) = x^2-16$, $(2x+1)(2x-1) = 4x^2-1$
$(5x+2)^2 = 25x^2+20x+4$, $(x-1)(x+1) = x^2-1$, $(x-3)^2 = x^2-6x+9$, $(1-4x)^2 = 1-8x+16x^2$,
$(3-10x)(3+10x) = 9-100x^2$.

Correction de l'exercice 9 page3 : astuces et fourberies

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2+6x+9$

1. b. $A_2(x) = x-(-2x+5)^2 = x-(2x-5)^2 = -4x^2+21x-25$

1. c. $A_3(x) = (-x-1)^2-(-x+2)^2 = 6x-3$

1. d. $A_4(x) = -(-x+1)^2 = -(x-1)^2 = -x^2+2x-1$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x+4)^2-(x+2)(x+3) = (x+2)(3x+5)$

2. b. $B_2(x) = x^2+2x+1-(2x+2)(x+3) = (x+1)(-x-5)$

2. c. $B_3(x) = 4x^2+4x+1-(6x+3)(x+1) = (-x-2)(2x+1)$

2. d. $B_4(x) = x^2+2x-3 = (x^2+2x+1)-4 = (x+1)^2-2^2 = (x+3)(x-1)$

Correction de l'exercice 12 page5

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$.

Partie A : Écrire et transformer (3 points)

1. **Montrer en développant que : $f(x) = \underline{-2x^2 + 5x - 2}$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - \left(3 - 3x - 6x + 6x^2\right) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 \\ f(x) &= \underline{-2x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

2. **Montrer <u>à l'aide d'une factorisation</u> que : $f(x) = \underline{(1-2x)(x-2)}$.**

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= (1-2x)^2 - 3(1-2x)(1-x) \\ &= (1-2x)\Big[(1-2x) - 3(1-x)\Big] \\ &= (1-2x)\Big[1 - 2x - 3 + 3x\Big] \\ f(x) &= \underline{(1-2x)(-2+x)} \end{aligned}$$

3. **Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \underline{-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}$.**

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - \frac{25}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - 2 \\ &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes (11 points)

1. **[1 point] Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$** .

En utilisant la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(1 - 2 \times \frac{1}{2}\right)}_{0} \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

En utilisant la forme (3.)

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -2\underbrace{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right)^2}_{0} + \frac{9}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}}$$

2. **[1 point] Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.**

En utilisant la forme développée :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}\right) - 2 = -4 + 5\left(\sqrt{2}\right) - 2 = \underline{5\sqrt{2} - 6}$$

3. **[6 points] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations** :

$f(x)=0$

$$\begin{aligned}&\iff (1-2\,x)\ (x-2)=0\\&\iff \Big(1-2\,x=0\Big)\ \text{ou}\ \Big(x-2=0\Big)\\&\iff \left(x=\frac{1}{2}\right)\ \text{ou}\ \Big(x=2\Big)\end{aligned}$$

Les solutions de (E_1) sont $\dfrac{1}{2}$ et 2 .

$f(x)=\dfrac{9}{8}$

$$\begin{aligned}&\iff -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}=\frac{9}{8}\\&\iff -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=0\\&\iff \left(x-\frac{5}{4}\right)=0\\&\iff x=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

La solution de (E_2) est $\dfrac{5}{4}$.

$f(x)=(x-2)$

$$\begin{aligned}&\iff (1-2\,x)\ (x-2)=(x-2)\\&\iff (1-2\,x)\ (x-2)-(x-2)=0\\&\iff (x-2)\Big((1-2x)-1\Big)=0\\&\iff (x-2)(-2x)=0\\&\iff \Big(x-2=0\Big)\ \text{ou}\ \Big(-2x=0\Big)\\&\iff \Big(x=2\Big)\ \text{ou}\ \Big(x=0\Big)\end{aligned}$$

Les solutions de (E_3) sont 0 et 2 .

4. **[3 points] Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint.**
D'après la question A3 on a que pour tout réel x :

$$f(x)=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

Pour tout réel x, l'expression $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2$ est positive ou nul donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \left(x-\frac{5}{4}\right)^2\geqslant 0$$

En multipliant par $(-2)<0$ on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ -2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2\leqslant 0$$

Et donc en ajoutant $\dfrac{9}{8}$ de chaque côté :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \underbrace{-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}}_{f(x)}\leqslant\frac{9}{8}$$

Soit

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)\leqslant\frac{9}{8}$$

Le nombre $\dfrac{9}{8}$ est donc un majorant de f sur $\mathbb{R}$, or d'après la question B1, il est atteint pour $x=\dfrac{5}{4}$, c'est donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 page 5

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(x+2)(3-5x)-(-4+6x)(-x-2)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. **[1 point]** Développement : $\boxed{f(x)=x^2+x-2}$.
2. **[1 point]** Factorisation : $\boxed{f(x)=(x-1)(x+2)}$.
3. **[1 point]** Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}&=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\\&=x^2+x-\frac{8}{4}\\&=x^2+x-2\\&=f(x)\ \text{ d'après la forme développée de la question 1a)}\end{aligned}$$

Et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \boxed{f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. **[2 points] Calculs de valeur**s.

   - **[0,5 point]** Pour calculer $f(0)$ utilisons la forme développée de la question 1a) : $\boxed{f(0) = -2}$;
   - **[1 point]** Pour calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ utilisons la forme de la question 1c) :

   $$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 - \frac{9}{4}$$

   donc

   $$\boxed{f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}}$$

   - **[0,5 point]** Pour calculer $f(1)$ utilisons la forme factorisée de la question 1b) : $\boxed{f(1) = 0}$.

2. **[1 point] Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.**

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right) - 2 = \underline{\sqrt{2}}$$

3. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations** :

3. a. [1 point] $\underline{(E_1) : f(x) = 0}$:

On utilise la forme factorisée pour résoudre (E_1)

$$f(x) = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0$$

C'est une équation produit, or par théorème, un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul donc

$$f(x) = 0 \iff \Big((x-1) = 0 \ \text{ ou } \ (x+2) = 0\Big)$$

$$\boxed{S_{(E_1)} = \{-2 \ ; \ 1\}}$$

3. b. [2 points] $\underline{(E_2) : f(x) = -\frac{9}{4}}$:

On utilise la forme de la question 1c) pour résoudre (E_2)

$$f(x) = -\frac{9}{4} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$$
$$f(x) = -\frac{9}{4} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$f(x) = -\frac{9}{4} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{S_{(E_2)} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

3. c. [2 points] $\underline{(E_3) : f(x) = -2}$:

On utilise la forme forme développée de la question 1a) pour résoudre (E_3)

$$\begin{aligned} f(x) = -2 &\iff x^2 + x - 2 = -2 \\ &\iff x^2 + x = 0 \\ &\iff x(x+1) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, or par théorème, un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul donc

$$f(x) = -2 \iff \Big(x = 0 \text{ ou } (x+1) = 0\Big)$$

$$\boxed{S_{(E_3)} = \{0\ ;\ -1\}}$$

4. **[2 points] Déterminons le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le réel pour lequel il est atteint**.
On va utiliser la forme de la question 1c) pour cela.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geqslant 0 - \frac{9}{4}$$

soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) \geqslant -\frac{9}{4}}$$

En outre d'après la question 2a), ce minorant est atteint pour $x = \dfrac{-1}{2}$ car $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$, c'est donc le minimum de f.

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ est } -\frac{9}{4}, \text{ il est atteint pour } x = -\frac{1}{2}}$$

Correction de l'exercice 14 page 6

Réponses

(2.b.) $S_{(E_1)} = \{-7\ ;\ 3\}$ / $S_{(E_2)} = \{0\ ;\ -4\}$ / $S_{(E_3)} = \{-2\}$
(2.c.) min -25, atteint pour $x = -2$.
(2.d.) $S_{(E_4)} = \left\{\sqrt{21}\ ;\ -\sqrt{21}\right\}$ *et* $S_{(E_5)} = \left\{\dfrac{21}{4}\right\}$
(2.e.) $f\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 19$ *et* $f\left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{-209}{9}$
(2.f.) $(f(x) = -9) \Leftrightarrow (x = -6 \ \ ou \ \ x = 2)$