Math93.com

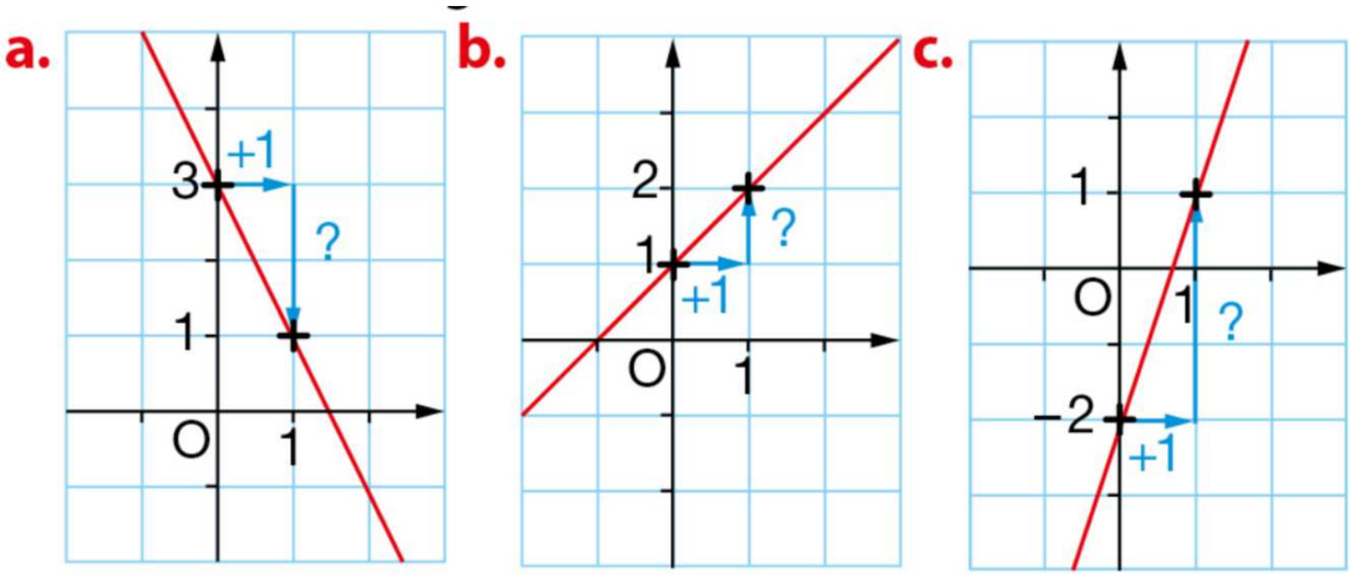
TD 1 - Troisième
Fonctions Affines

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD, pour les autres, des éléments de réponses sont proposés.

Partie I. Applications directes du cours

Exercice 1. Lectures graphiques (c)

Les droites ci-dessous sont les représentations graphiques des 3 fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$f(x) = \cdots\cdots\cdots$$

2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$

3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

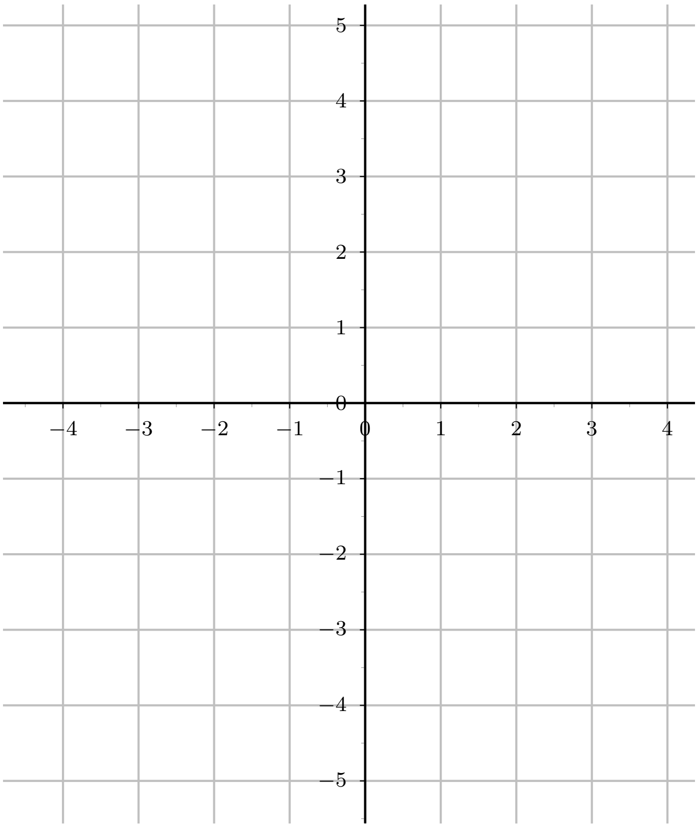
$$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 2. Proportionnalité des accroissements (c)

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	......	......
$f(x) = 2x + 1$	......	......

x	......	......
$g(x) = -3x + 2$	......	......



2. Compléter :

2. a. Le coefficient directeur de la fonction affine f est : ....

2. b. Donc quand x augmente de 1, $f(x)$: ....

2. c. Donc quand x augmente de 2, $f(x)$: ....

2. d. Le coefficient directeur de la fonction affine g est : ....

2. e. Donc quand x augmente de 1, $g(x)$: ....

2. f. Donc quand x augmente de 2, $g(x)$: ....

Exercice 3. Comme dans le cours (c)

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

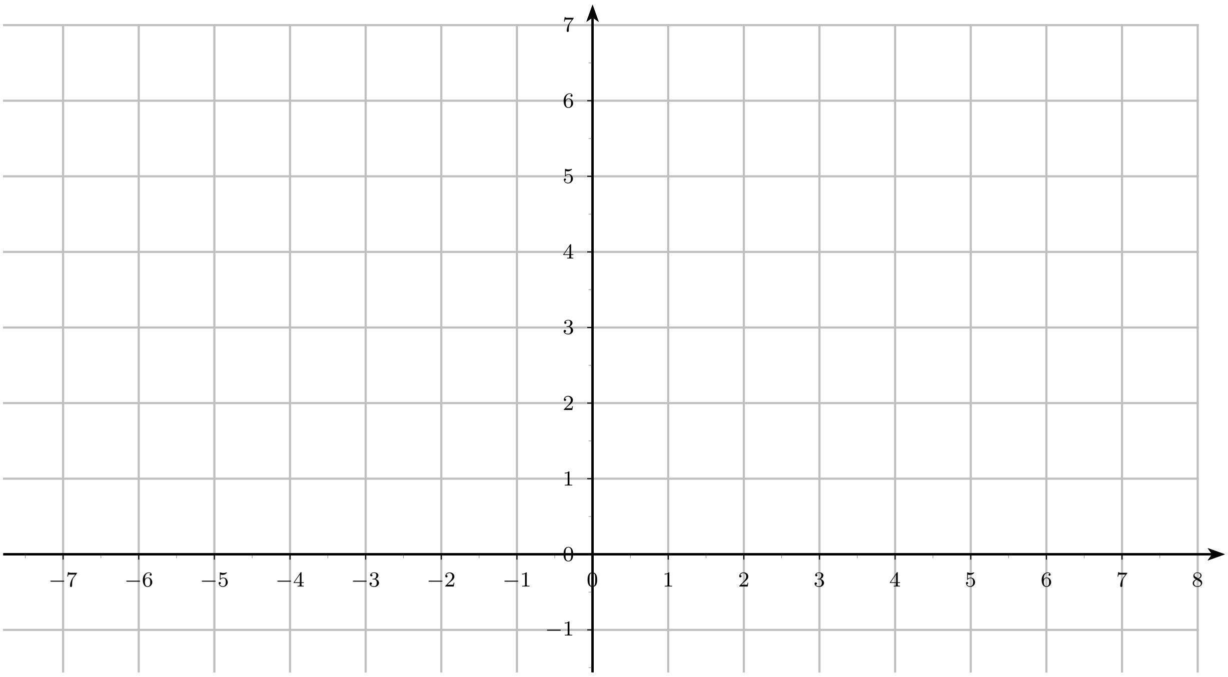
2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Exercice 4. Kwyk, c'est ma passion

Faire le TD kwyk sur les fonctions affines (c'est le TD 12).

Partie II. Lectures graphiques , calculs algébriques et conjectures

Exercice 5. Intersection de deux droites ... et conjecture ! (c)



1. Placer dans le repère ci-dessus les points $A(-1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1)$ et $I(0,45\ ;\ 2,1)$. Tracer la droite (AB).
2. Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f. Déterminer l'expression de f.
3. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$. Montrer que g est affine.
4. Construire sur le même graphique la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.
Aide : Choisir astucieusement les valeurs de x .

x	......	......
$g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$	......	......

5. **Une conjecture : Lecture graphique**.
Micah, Eoin, nos historiens mathématiciens, affirment :

Affirmation 1

« But this is obvius !
D'après nos graphiques, le point d'intersection des deux droites $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est I. »

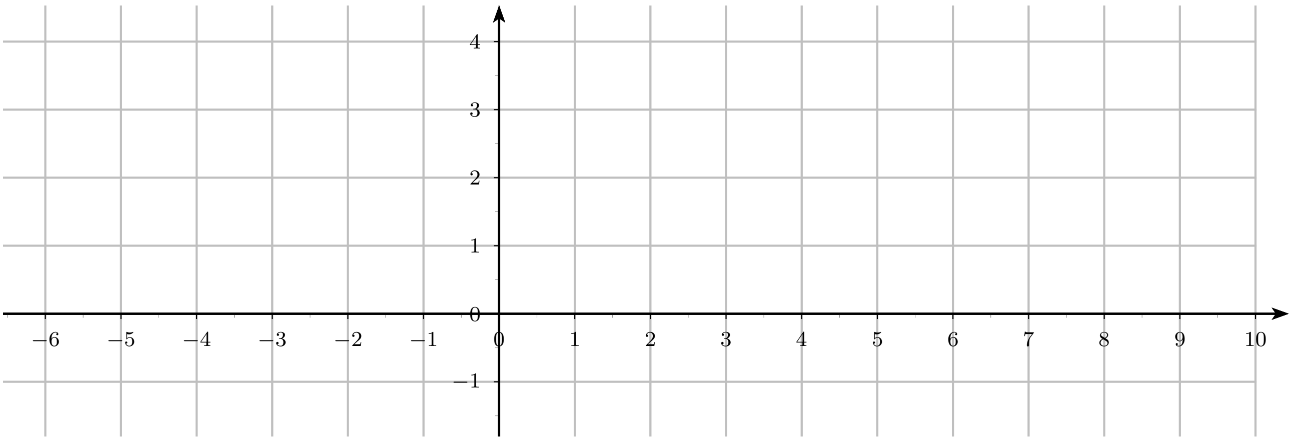
Qu'en pensez-vous ?

6. **Par le calcul** : Chloé et Solène, nos historiennes mathématiciennes répondent :

Affirmation 2

« Let me double-check ! Mamamia !
Avec les graphiques, on reste au stade de la conjecture les amis !
Essayons de déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection des deux droites pour valider ou invalider cette magnifique conjecture qui fera date dans l'histoire ! »

Exercice 6. (c) Deux conjectures : Linéaire ou pas ? Parallèles ou pas ?



1. Construire dans ce repère les droites (AB) et (CD) avec $A(-5\ ;\ -1)$; $B(9\ ;\ 2)$; $C(-4\ ;\ 1)$ et $D(7\ ;\ 3.5)$

2. De la conjecture à la preuve :

2. a. Une conjecture : Par lecture graphique

Affirmation 3

Tristan et Noémie affirment : « *But this is crystal clear !*
Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f, et cette fonction est de façon évidente une fonction linéaire . »

Qu'en pensez-vous ?

2. b. Une preuve :

Affirmation 4

Léopold et Olivia répondent : « *Don't be in such a hurry !*
Avec les graphiques, on reste au stade de la conjecture, on vous l'a déjà dit, Mamamia !
Essayons de déterminer par le calcul de déterminer l'expression de f pour valider ou invalider cette magnifique conjecture ! »

3. [Bonus] Vérifier ou invalider une affirmation.

Affirmation 5

Rhys et Mia affirment : « *on le voit bien sur le graphique, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.* »

Qu'en pensez-vous ?

Exercice 7. Programmes de calcul et conjecture

On considère les programmes de calcul ci-dessous :

Programme de calcul
Programme 1

- Choisir un nombre ;
- multiplier le nombre par 5 ;
- retrancher 8 au résultat précédent ;
- multiplier le résultat précédent par 2 ;
- afficher le résultat.

Programme de calcul
Programme 2

- Choisir un nombre ;
- diviser le nombre par 2 ;
- retrancher 2 au résultat précédent ;
- multiplier le résultat précédent par 6 ;
- ajouter 12 au résultat précédent ;
- afficher le résultat.

1. Vérifier les résultats suivants :

Choix du nombre de départ	0	1	2
Résultat avec le programme 1	-16	-6	4
Résultat avec le programme 2	0	3	6

2. Pour chaque programme de calcul ci-dessus, donner l'expression du nombre obtenu lorsqu'on choisit x comme nombre de départ.

3. **Une conjecture** : Représenter dans un repère de votre choix les courbes représentatives des deux fonctions associées à chaque programme. Déterminer graphiquement si il existe un nombre de départ qui donne le même résultat pour les deux programmes.

4. **Une preuve** : Déterminer par le calcul si il existe un nombre de départ qui donne le même résultat pour les deux programmes. Ce nombre est-il un entier naturel ?

Exercice 8. EPI : Quadratics and linears fonctions !

Remarque

The problem is : how to find the point of intersection of a linear function and a quadratic function.
We are going to establish a conjecture graphically, then we have to prove it algebraically.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 4 \text{ et } g(x) = 3x - 3$$

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur représentations graphiques respectives.

Problématique

On cherche à déterminer les points d'intersection des deux courbes, enfin, si ils existent.

1. Une conjecture : Graphiquement.
   Sur une logiciel de géométrie dynamique comme géogébra, construire les représentation graphique des deux fonctions et lire les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.
2. Une preuve algébrique.
   Déterminer algébriquement les abscisses des points d'intersection des deux courbes puis les coordonnées de ces points.

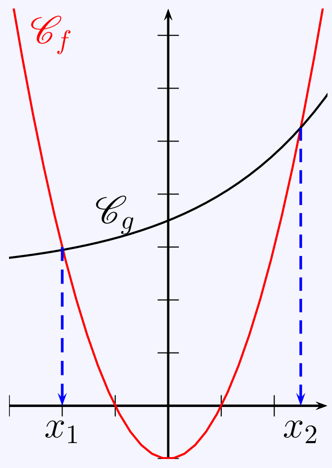
On a la propriété suivante :

Propriété 1 (L'équation $f(x) = g(x)$)

Soit f et g deux fonctions de courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les **abscisses des points d'intersection** (éventuels) de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ sont les éventuelles solutions de l'équation

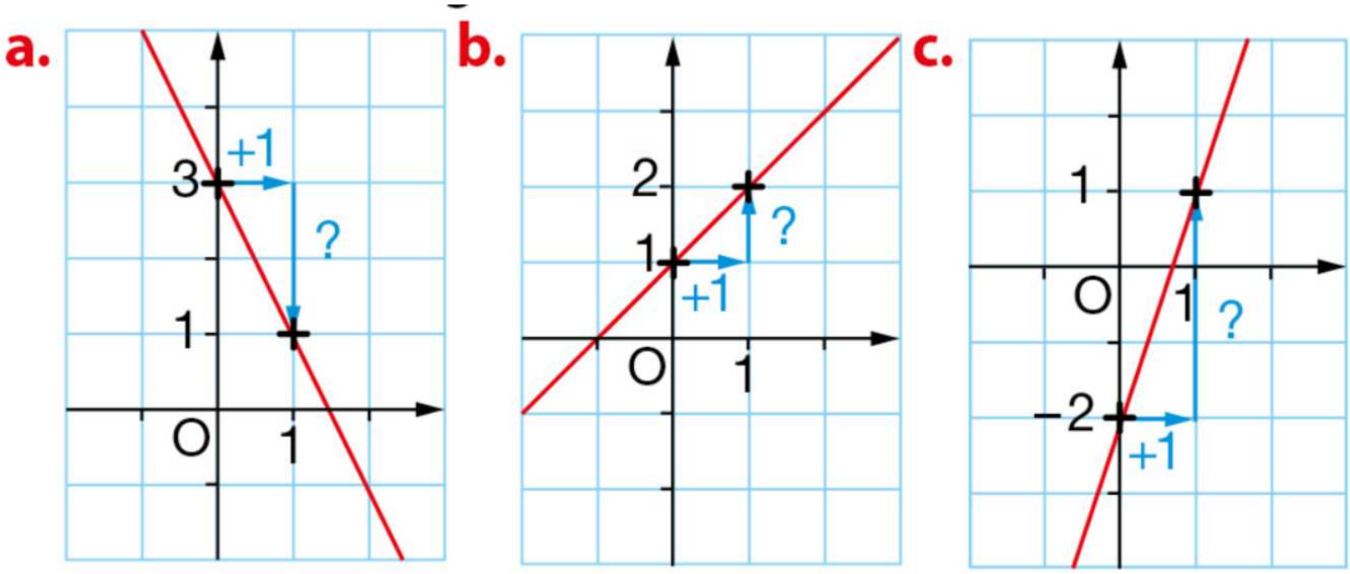
$$f(x) = g(x)$$



Partie III. Correction

Correction de l'exercice 1 page 1

fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
   Par lecture graphique :
   $$p = 3 \quad \text{et} \quad m = -2$$
   Donc
   $$f(x) = -2x + 3$$

2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
   Par lecture graphique :
   $$p = 1 \quad \text{et} \quad m = 1$$
   Donc
   $$g(x) = x + 1$$

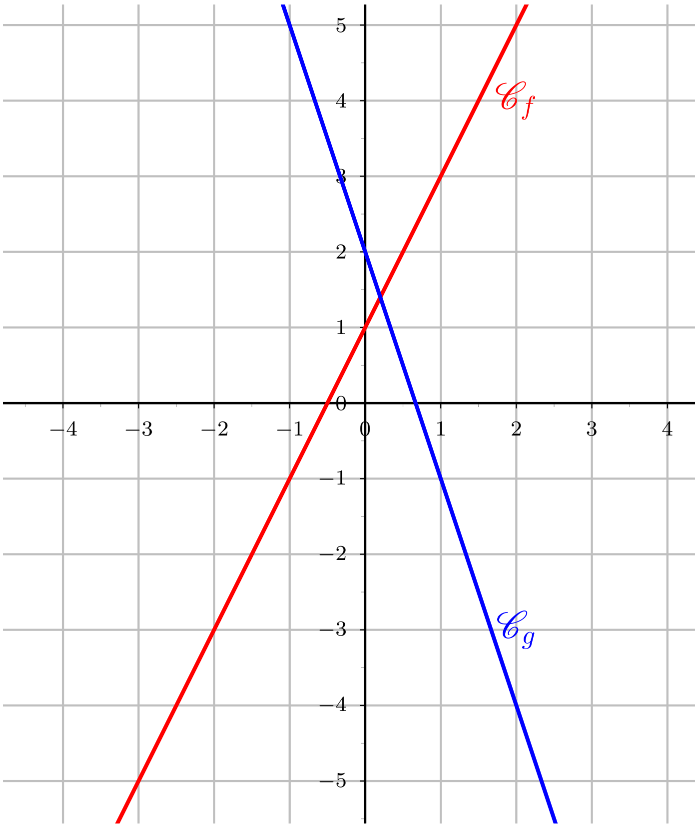
3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
   Par lecture graphique :
   $$p = -2 \quad \text{et} \quad m = 3$$
   Donc
   $$h(x) = 3x - 2$$

Correction de l'exercice 2 page 2

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	0	2
$f(x) = 2x + 1$	1	5

x	0	2
$g(x) = -3x + 2$	2	-4



2. Compléter :

2. a. Le coefficient directeur de la fonction affine f est : 2

2. b. Donc quand x augmente de 1, $f(x)$: augmente de $2 \times 1 = 2$

2. c. Donc quand x augmente de 2, $f(x)$: augmente de $2 \times 2 = 4$

2. d. Le coefficient directeur de la fonction affine g est : -3

2. e. Donc quand x augmente de 1, $g(x)$: diminue de $3 \times 1 = 3$

2. f. Donc quand x augmente de 2, $g(x)$: diminue de $3 \times 2 = 6$

Correction de l'exercice 3 page 2

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

Correction

- La fonction affine f est de la forme $f(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(4) = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(1\,;\,5) \in \mathscr{C}_f \\ B(4\,;\,9) \in \mathscr{C}_f \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(1\,;\,5) \\ B(4\,;\,9) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{4-1} = \frac{4}{3}$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{4}{3}x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$A(1\,;\,5) \in \mathscr{C}_f \Longrightarrow f(1) = 5$$

Et

$$\begin{aligned} f(1) = 5 &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} \times 1 + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow p = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

- Conclusion.

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $f(1) = 5$.

$$f(1) = \frac{4}{3} \times 1 + \frac{11}{3} = \frac{15}{3} = 5 \checkmark$$

  - On doit avoir $f(4) = 9$.

$$f(4) = \frac{4}{3} \times 4 + \frac{11}{3} = \frac{16+11}{3} = \frac{27}{3} = 9 \checkmark$$

2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Correction

- La fonction affine g est de la forme $g(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \\ B(2\ ;\ -4) \in \mathscr{C}_g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ g(2) = -4 \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \\ B(2\ ;\ -4) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-2}{2-0} = \frac{-6}{2} = -3$$

On a donc :

$$g(x) = -3x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p, c'est simple ici car l'image de 0 donne directement p

$$A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \Longrightarrow g(0) = 2 = p$$

- Conclusion.
Donc

$$\boxed{g(x) = -3x + 2}$$

- Vérification.

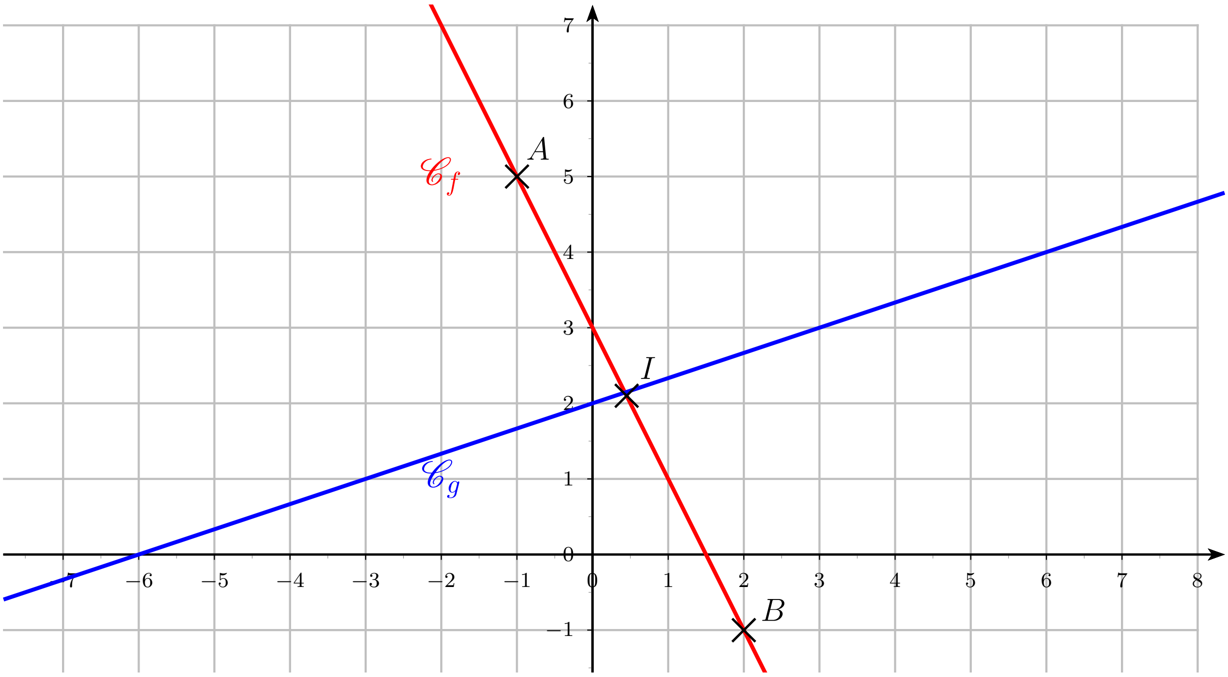
  – On doit avoir $g(0) = 2$.

$$g(0) = -3 \times 0 + 2 = 2 \ \checkmark$$

  – On doit avoir $g(2) = -4$.

$$g(2) = -3 \times 2 + 2 = -6 + 2 = -4 \ \checkmark$$

Correction de l'exercice 5 page 3 : Intersection de deux droites ... et conjecture



1. Placer dans le repère ci-dessus les points $A(-1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1)$ et $I(0,45\ ;\ 2,1)$. Tracer la droite (AB).

2. Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f. Déterminer l'expression de f.

Correction

- La fonction affine f est de la forme $f(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} A(-1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_g \\ B(2\ ;\ -1) \in \mathscr{C}_g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(-1) = 5 \\ f(2) = -1 \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(-1\ ;\ 5) \\ B(2\ ;\ -1) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-5}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$$

On a donc :

$$f(x) = -2x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$A(-1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_f \Longrightarrow f(-1) = 5$$

Et

$$\begin{aligned} f(-1) = 5 &\Longleftrightarrow -2 \times (-1) + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow 2 + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow p = 3 \end{aligned}$$

- Conclusion.
Donc

$$\boxed{f(x) = -2x + 3}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $f(-1)=5$.

$$f(-1) = -2\times(-1)+3 = 2+3 = 5 \quad \checkmark$$

  - On doit avoir $f(2)=-1$.

$$g(2) = -2\times 2+3 = -4+3 = -1 \quad \checkmark$$

3. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$. Montrer que g est affine.

Correction

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x}{3} + 2 = \frac{1}{3}x + 2$$

Donc g est une fonction affine car de la forme

$$x :\longmapsto mx+p \text{ avec } \begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ p = 3 \end{cases}$$

4. Construire sur le même graphique la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.
Aide : Choisir astucieusement les valeurs de x .

Correction

La fonction g est affine donc sa courbe représentative est une droite, deux points suffisent pour la tracer.

x	0	6
$g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$	2	4

5. Une conjecture : Lecture graphique.
Micah, Eoin, nos historiens mathématiciens, affirment :

Affirmation 6

« But this is obvius !
D'après nos graphiques, le point d'intersection des deux droites $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est I. »

Qu'en pensez-vous ?

Correction

Pour valider cette conjecture, il suffit vérifier si le point $I(0,45\ ;\ 2,1)$ appartient aux deux droites.

- $I(0,45\ ;\ 2.1)$ appartient-il à la droite (AB) associée à la fonction f ?

  On a montré que la fonction f était définie par : $f(x) = -2x + 3$, donc :

  $$f(0,45) = -2 \times 0,45 + 3 = -0,9 + 3 = 2,1 \quad \checkmark$$

  Donc le point I appartient bien à la droite (AB).

- $I(0,45\ ;\ 2.1)$ appartient-il à la droite $\mathscr{C}_g$ associée à la fonction g ?

  La fonction g est définie par : $x(x) = x/3 + 2$, donc :

  $$g(0,45) = \frac{0,45}{3} + 2 = 2,15 \quad \neq 2,1$$

  Donc le point I n'appartient pas à la droite $\mathscr{C}_g$.

- Conclusion : le point I n'est donc pas le point d'intersection des deux droites.

6. **Par le calcul** : Chloé et Solène, nos historiennes mathématiciennes répondent :

Affirmation 7

« Let me double-check ! Mamamia !
Avec les graphiques, on reste au stade de la conjecture les amis !
Essayons de déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection des deux droites pour valider ou invalider cette magnifique conjecture qui fera date dans l'histoire ! »

Correction

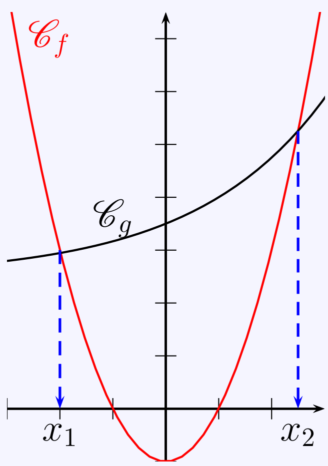
On va appliquer la propriété suivante :

Propriété 2 (L'équation $f(x) = g(x)$)

Soit f et g deux fonctions de courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Les **abscisses des points d'intersection** (éventuels) de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ sont les éventuelles solutions de l'équation

$$f(x) = g(x)$$



Donc pour calculer l'abscisse du point d'intersection des deux droites, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Pour l'ordonnée, il suffira de calculer l'image de ce nombre par f ou par g.

- Calcul de l'abscisse du point d'intersection.
  L'abscisse du point d'intersection des deux droites, est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ soit :

$$f(x) = g(x) \iff -2x + 3 = \frac{x}{3} + 2$$

  On va simplement multiplier les deux membres par 3

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 3 \times \Big(-2x + 3 \Big) = 3 \times \left(\frac{x}{3} + 2 \right) \\ &\iff -6x + 9 = x + 6 \\ &\iff 3 = 7x \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = g(x) \iff x = \frac{3}{7} \approx 0,43}$$

- Calcul de l'ordonnée du point d'intersection.
  Il suffira de calculer l'image de ce nombre par f ou par g pour avoir l'ordonnée du point d'intersection puisque ce point appartient, et à $\mathscr{C}_f$, et à $\mathscr{C}_g$. On doit obtenir la même image.
  - Avec f définie par : $f(x) = -2x + 3$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{7}\right) &= -3 \times \left(\frac{3}{7}\right) + 3 \\ &= -\frac{6}{7} + \frac{21}{7} \\ &= \frac{15}{7} \approx 2,14 \end{aligned}$$

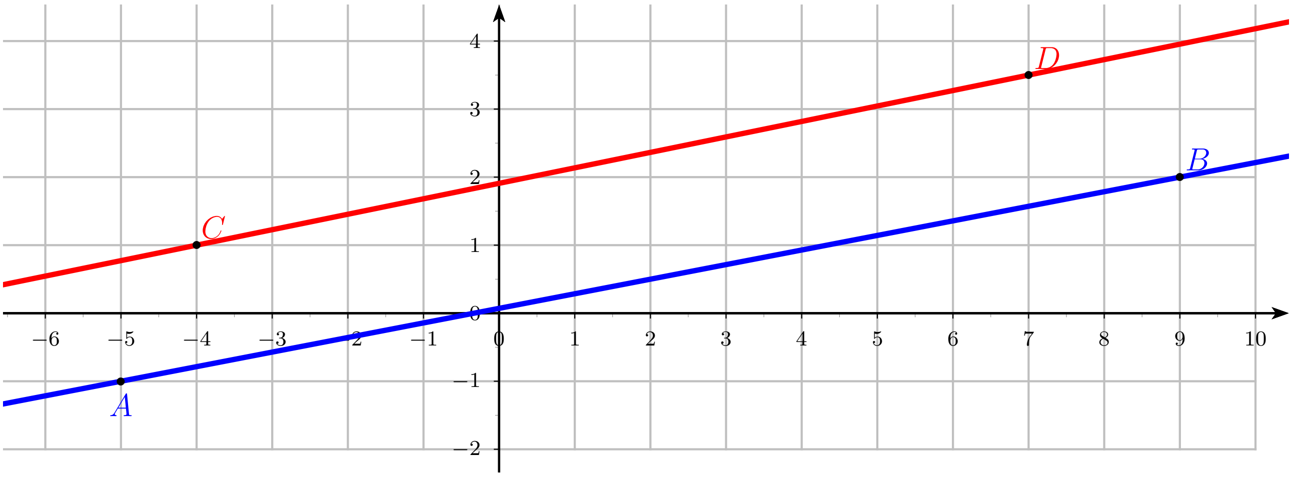
    Donc les coordonnées du point d'intersection sont : $\boxed{\left(\frac{3}{7}\ ;\ \frac{15}{7}\right)}$

  - Avec g définie par : $g(x) = x/3 + 2 = \dfrac{1}{3}x + 2$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{7}\right) &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + 2 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{14}{7} \\ &= \frac{15}{7} \quad \checkmark \end{aligned}$$

    On retrouve bien la même image, c'est validé.

Correction de l'exercice 6 page 4



1. Construire dans ce repère les droites (AB) et (CD) avec $A(-5\ ;\ -1)$; $B(9\ ;\ 2)$; $C(-4\ ;\ 1)$ et $D(7\ ;\ 3.5)$

2. **De la conjecture à la preuve** :

2. a. Une conjecture : Par lecture graphique
Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f. Graphiquement, cette fonction semble-t-elle être une fonction linéaire ? Justifier.

Correction

La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère. Or ici, il semble que le droite (AB) passe par l'origine du repère, mais cela ne reste qu'une conjecture graphique.

2. b. Une preuve : Déterminer l'expression de f et vérifier la conjecture de la question précédente.

Correction

- La fonction affine f associée à la droite (AB) est de la forme $f(x) = mx + p$.
- On détermine m.
  Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(-5\ ;\ -1) \\ B(9\ ;\ 2) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2+1}{9+5} = \frac{3}{14}$$

  On a donc :

$$f(x) = \frac{3}{14}x + p$$

- On détermine p.
  Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$A(-5\ ;\ -1) \Longrightarrow f(-5) = -1$$

  Et

$$\begin{aligned} f(-5) = -1 &\Longleftrightarrow \frac{3}{14} \times (-5) + p = -1 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{15}{14} + p = -1 \\ &\Longleftrightarrow p = -1 + \frac{15}{14} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

- Conclusion.
  Donc
  $$f(x) = \frac{3}{14}x + \frac{1}{14}$$
  La fonction f est donc affine mais pas linéaire (car p n'est pas nul). La conjecture émise lors de la question **(2.a.)** était fausse !

3. [Bonus]Vérifier ou invalider une affirmation.

Affirmation 8

« *on le voit bien sur le graphique, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.* »

Correction

On peut appliquer cette propriété :

Propriété 3

Deux droites représentant des fonctions affines sont parallèles, si et seulement si leurs coefficients directeurs (ou pentes, *slopes*) sont égaux.

Si les droites sont parallèles, alors les fonctions affines associées ont des coefficient directeurs égaux, les droites associées ont les mêmes pentes. La propriété de proportionnalité des accroissements permet de calculer le coefficient directeur m' de la fonction g associée à la droite (CD).

$$\begin{cases} C(-4\ ;\ 1) \\ D(7\ ;\ 3.5) \end{cases} \Longrightarrow m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3.5-1}{7+4} = \frac{2.5}{11} \neq \frac{3}{14}$$

Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas parallèles car les coefficient directeurs des fonctions associées sont différents.

Compléments

On peut montrer que $g(x) = \frac{2.5}{11}x + \frac{21}{11}$ *et que l'abscisse du point d'intersection des deux droites est :* $x = -\frac{283}{2}$.