Math93.com

TD 1 - Troisième
Fonctions Linéaire et proportionnalité

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD, pour les autres, des éléments de réponses sont proposés.

Partie I. Applications du cours

Exercice 1. Images, antécédent et courbe (c)

Soit f la fonction définie pour x réel par :

$$f(x) = -\frac{x}{3}$$

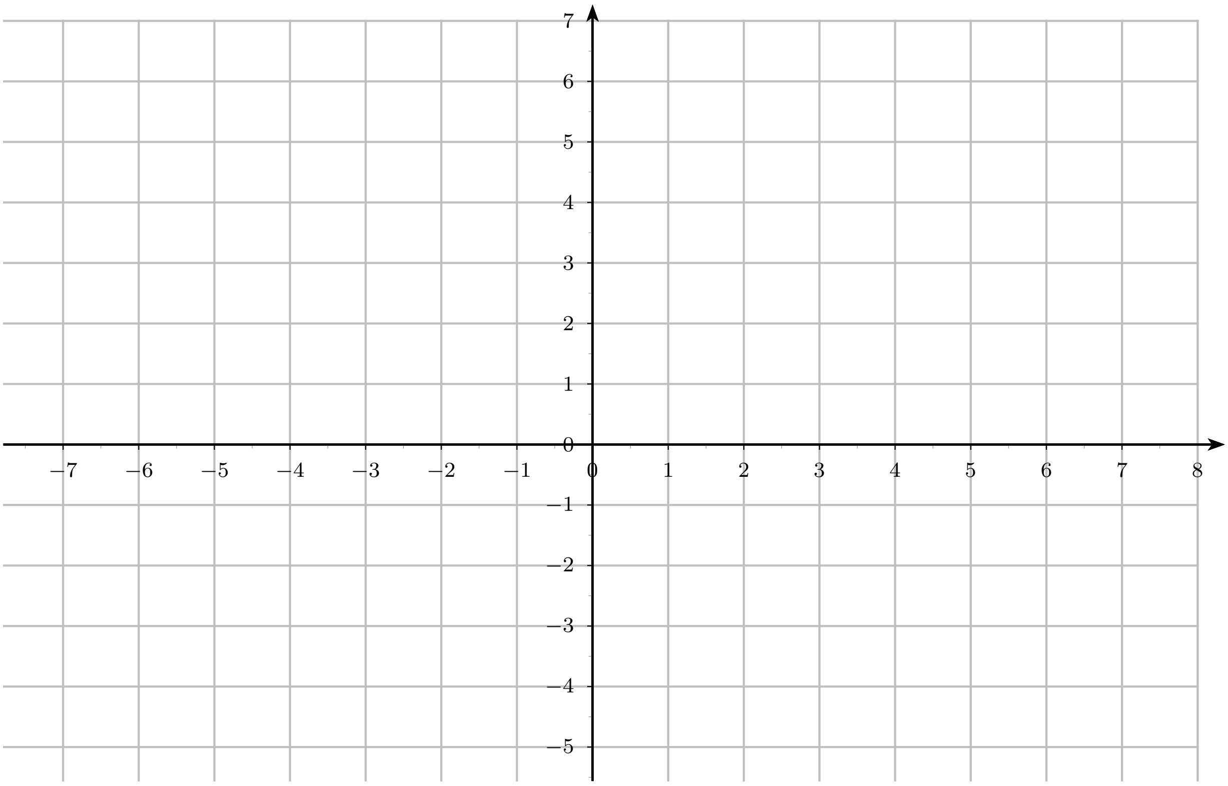
1. Montrer que f est linéaire et donner son coefficient directeur (*slope*).

2. Calculer l'image de -2 par f.

3. Déterminer l'antécédent de 1 par f.

4. Dans le repère ci-dessous, tracer la droite (d), représentant graphiquement la fonction f après avoir choisi deux valeurs ... astucieuses !

x		
$f(x) = -\frac{x}{3}$		



Exercice 2. Tableau de proportionnalité

Pour chaque cas, dire si le tableau de valeurs peut être celui d'une fonction linéaire. Si oui, donner son coefficient de proportionnalité et l'expression de la fonction linéaire associée.

a.

x	0	2	10
$g(x)$	0	5	25

b.

x	-2	0	1
$h(x)$	4	1	-2

Exercice 3. Situations de proportionnalité

Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une fonction linéaire.

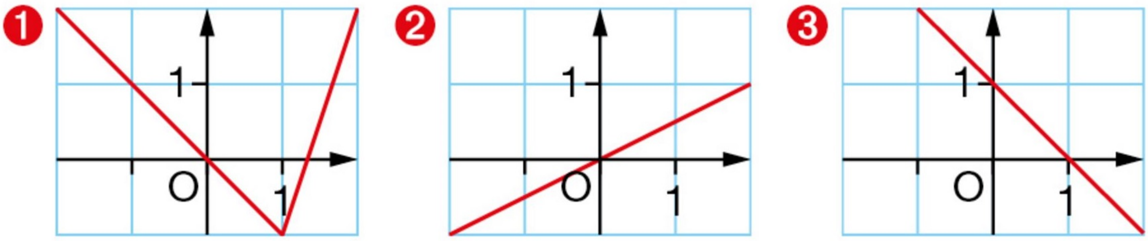
1. Au côté x, en cm, d'un triangle équilatéral, on associe son périmètre, en cm.
2. Au rayon r, en cm, d'un disque, on associe son aire, en cm^2.

Exercice 4. Détermination connaissant une image

f est la fonction linéaire telle que $f(10) = 12$.
Déterminer le coefficient directeur de la fonction linéaire f puis l'expression de $f(x)$.

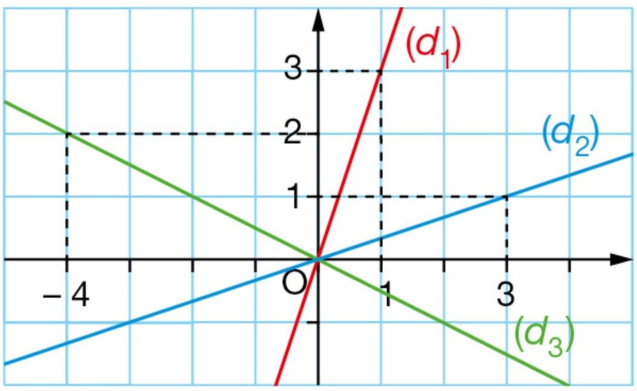
Exercice 5. Graphiques

Dans chacun des cas suivants, le graphique représente-t-il une fonction linéaire ? Si oui, donner son coefficient directeur.



Exercice 6. A partir d'un graphique

Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentent respectivement les fonctions linéaires f, g et h.



Déterminer les expressions de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

Exercice 7. Des programmes de calculs

30 Pour chaque programme de calcul, dire si l'on peut lui associer une fonction linéaire.
Si oui, donner son coefficient.

P_1	P_2
• Choisir un nombre. • Multiplier par 7. • Ajouter 2.	• Choisir un nombre. • Multiplier par 7. • Diviser par 2.

P_3	P_4
• Choisir un nombre. • Ajouter 4.	• Choisir un nombre. • Prendre sa moitié.

Exercice 8. Avec un tableur

h est la fonction linéaire de coefficient directeur 5.
A l'aide du tableur, Micah veut compléter le tableau ci-dessous en recopiant vers la droite les formules qu'il saisira dans les cellules $B1$ et $B3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Antécédent du nombre**								
2	**Nombre**	-3,4	-1,5	0	1	2,9	3,6	12	15,3
3	**Image du nombre**								

Quelle formule doit-il saisir dans les cellules $B1$ et $B3$?

Exercice 9. Testez-vous sur Kwyk

↬ Testez vous sur Kwyk : **TD 11 - Fonctions linéaires**.

Partie II. Applications et problèmes

Exercice 10. Miles et kilomètres

Aux États-unis, les distances sont mesurées en miles. Voici un extrait d'une célèbre encyclopédie en ligne.

Remarque historique

The mile, sometimes the international mile or statute mile to distinguish it from other miles, is a British imperial unit and US customary unit of distance ; both are based on the older English unit of length equal to 5 280 English feet, or 1 760 yards. The statute mile was standardised between the British Commonwealth and the United States by an international agreement in 1959, when it was formally redefined with respect to SI units as exactly 1 609.344 metres.

Un moyen mnémotechnique pour s'en souvenir : « *un ciseau neuf* »

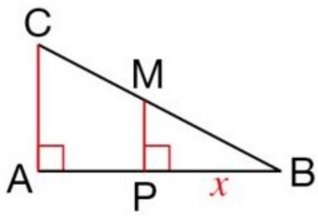
A une distance x exprimée en miles, on associe cette distance exprimée en km.
On note h la fonction linéaire qui modélise cette situation.

1. En utilisant les informations de l'extrait ci dessus, donner l'expression de la fonction h (on arrondira le coefficient directeur au millième).
2. La distance entre Los Angeles et San Diego est de 121 miles.
   Exprimer cette distance en km.
3. La distance entre Lyon et Marseille est de 313 km.
   Exprimer cette distance en miles (à l'unité près).
4. Le Mph équivaut à 1 mile terrestre par heure.
   Sur une autoroute française, la vitesse est limitée à 130 km/h. Exprimer cette vitesse en Mph.
5. Un automobiliste ayant une voiture dont la vitesse est exprimée en km/h roule sur une route aux US, le cadrant indique 100 km/h. Le passager prend la photo suivante, Est-il en infraction ?

Did you know ?

The United States Metric Board (USMB) was a United States government agency set up to encourage metrication. The metrification assessment board existed from 1975 to 1982, ending when President Ronald Reagan abolished it.

Exercice 11. Calculer un périmètre



ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 15$ cm et $AC = 8$ cm.
P est un point du segment $[AB]$, distinct de A et B.
La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe le segment $[BC]$ en M. On note x la longueur BP en cm.

1.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

1. b. Montrer que $PM = \frac{8}{15}x$.

1. c. Calculer BC.

1. d. En déduire que $BM = \frac{17}{15}x$.

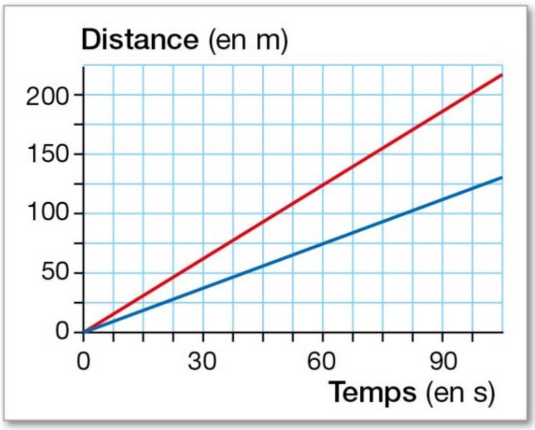
2. On note p la fonction qui modélise le périmètre (en cm) du triangle MPB.

2. a. Montrer que p est linéaire et donner son coefficient directeur.

2. b. Pour quelles valeurs de x le périmètre de MBP est-il égal à un nombre entier de cm ?

Exercice 12. Une histoire de tapis roulant

Ce graphique permet de comparer la « marche sur le tapis roulant » et la « marche à côté du tapis roulant » pour deux personnes ayant à peu près la même vitesse de marche.



1. Reproduire ce graphique et ajouter une demi-droite correspondant à une personne qui reste immobile sur le tapis.

2. Déterminer les expressions des trois fonctions linéaires associées.

3. Interpréter les coefficients directeurs de ces 3 fonctions linéaires dans le cadre de l'exercice.

Exercice 13. EPI (Exercice à Prise d'Initiative)

Dans un repère du plan, on considère la droite qui passe par les points $(A(-78\ ;\ 91)$ et $(B(90\ ;\ -105)$.
Cette droite (AB) est-elle la courbe représentative d'une fonction linéaire ?

Partie III. Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 page 1

Soit f la fonction définie pour x réel par :

$$f(x) = -\frac{x}{3}$$

1. Montrer que f est linéaire et donner son coefficient directeur (*slope*).

> **Correction**
>
> La fonction f est de la forme mw avec $m = -\frac{1}{3}$ car :
>
> $$f(x) = -\frac{1}{3} \times x = m \times x$$
>
> De ce fait, la fonction f est linéaire.

2. Calculer l'image de -2 par f.

3. Déterminer l'antécédent de 1 par f.

4. Dans un repère, tracer la droite (d), représentant graphiquement la fonction f.

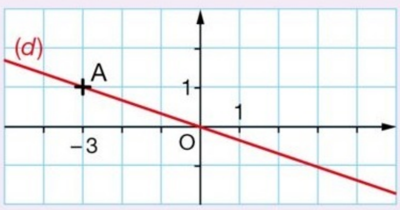
2) $f(-2) = -\frac{1}{3} \times (-2) = \frac{2}{3}$.
Donc l'image de -2 par f est $\frac{2}{3}$.

3) On cherche un nombre x tel que $f(x) = 1$ c'est-à-dire tel que $-\frac{1}{3}x = 1$.

Ainsi $x = 1 : \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \times (-3) = -3$

L'antécédent de 1 par f est -3.

4) La droite (d) passe par l'origine du repère.
D'après la question **b**, $f(-3) = 1$, donc (d) passe par le point A$(-3\,;1)$.



Conseils

- Répondre aux questions **2.** et **3.** revient à compléter ce tableau de proportionnalité :

x	-2	
$f(x)$		1

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

- D'après le paragraphe **2** du cours, on aurait dû placer le point de coordonnées $\left(1\,;-\frac{1}{3}\right)$, mais il n'est pas facile à placer.
Il vaut mieux choisir un point à coordonnées entières : $(-3\,;1)$ par exemple.

Correction de l'exercice 2 page 2

Pour chaque cas, dire si le tableau de valeurs peut être celui d'une fonction linéaire. Si oui, donner son coefficient de proportionnalité et l'expression de la fonction linéaire associée.

a.

x	0	2	10
$g(x)$	0	5	25

b.

x	−2	0	1
$h(x)$	4	1	−2

Correction

- Pour le tableau a, le coefficient de proportionnalité est

$$k = \frac{5}{2} = \frac{25}{10} = 2,5$$

  L'expression de la fonction linéaire est :

$$\boxed{g(x) = 2,5x}$$

- Pour le tableau b, puisque l'image de 0 n'est pas 0, il ne peut pas être celui d'une fonction linéaire.

Correction de l'exercice 3 page 2 : Situations de proportionnalité

Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une fonction linéaire.

1. Au côté x, en cm, d'un triangle équilatéral, on associe son périmètre, en cm.

Correction

L'expression du périmètre en fonction du côté x est :

$$p(x) = 3x$$

C'est une fonction linéaire de coefficient directeur 3.

2. Au rayon r, en cm, d'un disque, on associe son aire, en cm^2.

Correction

L'expression de l'aire en fonction du rayon r est :

$$A(r) = \pi r^2$$

Ce n'est pas une fonction linéaire.

Pour le prouver rigoureusement on peut calculer 2 images et montrer qu'il n'y a pas proportionnalité :

r	1	2
$A(r) = \pi r^2$	π	4π

Or on a :

$$\frac{\pi}{1} \neq \frac{4\pi}{2}$$

Correction de l'exercice 4 page 2 : Détermination connaissant une image

f est la fonction linéaire telle que $f(10) = 12$.
Déterminer le coefficient directeur de la fonction linéaire f puis l'expression de $f(x)$.

Correction

La fonction f est linéaire donc de la forme $f(x) = mx$.
Puisque $f(10) = 12$ on a :

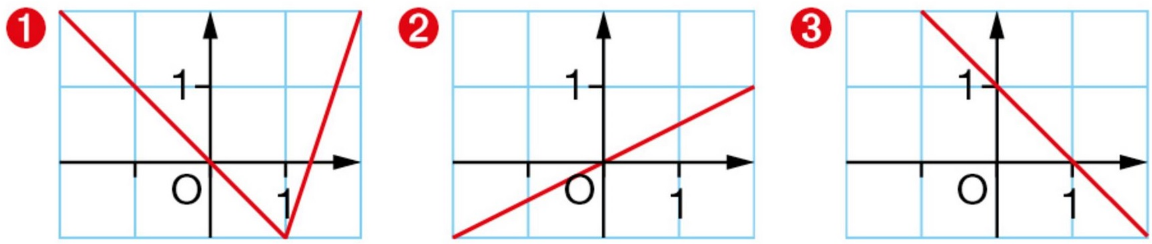
$$m \times 10 = 12 \Longrightarrow m = \frac{12}{10} = 1,2$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = 1,2x}$$

Correction de l'exercice 5 page 2 : Graphiques

Dans chacun des cas suivants, le graphique représente-t-il une fonction linéaire ? Si oui, donner son coefficient directeur.

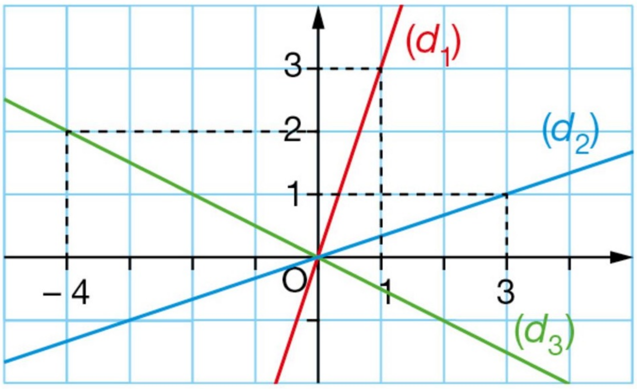


Correction

1. La représentation graphique n'est pas une droite, donc elle n'est pas associée à une fonction linéaire.
2. La représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère (enfin semble-t-il ..), donc elle est associée à une fonction linéaire.
3. La représentation graphique est une droite mais elle ne passe pas par l'origine du repère, donc elle n'est pas associée à une fonction linéaire.

Correction de l'exercice 6 page 2 :A partir d'un graphique

Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) représentent respectivement les fonctions linéaires f, g et h.



Déterminer les expressions de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

Correction

1. La droite (d_1) passe par l'origine du repère et par le point $A(1\ ;\ 3)$.
Donc l'image de 1 par f est 3.
La fonction f associée est linéaire donc de la forme $f(x) = mx$.
Puisque $f(1) = 3$ on a :

$$m \times 1 = 3 \Longrightarrow m = 3$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = 3x}$$

2. La droite (d_2) passe par l'origine du repère et par le point $B(3\ ;\ 1)$.
Donc l'image de 3 par g est 1.
La fonction g associée est linéaire donc de la forme $g(x) = mx$.
Puisque $g(3) = 1$ on a :

$$m \times 3 = 1 \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}}$$

3. La droite (d_3) passe par l'origine du repère et par le point $C(-4\ ;\ 2)$.
Donc l'image de -4 par h est 2.
La fonction h associée est linéaire donc de la forme $h(x) = mx$.
Puisque $h(-4) = 2$ on a :

$$m \times (-4) = 2 \Longrightarrow m = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{h(x) = -\frac{1}{2}x = -\frac{x}{2}}$$

Correction de l'exercice 7 page 3 : Des programmes de calculs

30 Pour chaque programme de calcul, dire si l'on peut lui associer une fonction linéaire.
Si oui, donner son coefficient.

P_1	P_2
• Choisir un nombre. • Multiplier par 7. • Ajouter 2.	• Choisir un nombre. • Multiplier par 7. • Diviser par 2.

P_3	P_4
• Choisir un nombre. • Ajouter 4.	• Choisir un nombre. • Prendre sa moitié.

Correction

1. Pour P_1 : Si on part d'un nombre x, on obtient :

$$x \longmapsto 7x + 2$$

Ce qui n'est pas l'expression d'une fonction linéaire.

2. Pour P_2 : Si on part d'un nombre x, on obtient :

$$x \longmapsto 7x \div 2 = 3,5x$$

Ce qui est l'expression d'une fonction linéaire de coefficient directeur $m = 3,5$.

3. Pour P_3 : Si on part d'un nombre x, on obtient :

$$x \longmapsto x + 4$$

Ce qui n'est pas l'expression d'une fonction linéaire.

4. Pour P_4 : Si on part d'un nombre x, on obtient :

$$x \longmapsto x \div 2 = 0,5x$$

Ce qui est l'expression d'une fonction linéaire de coefficient directeur $m = 0,5$.

Correction de l'exercice 8 page 3 : Avec un tableur

h est la fonction linéaire de coefficient directeur 5.
A l'aide du tableur, Micah veut compléter le tableau ci-dessous en recopiant vers la droite les formules qu'il saisira dans les cellules $B1$ et $B3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Antécédent du nombre**								
2	**Nombre**	-3,4	-1,5	0	1	2,9	3,6	12	15,3
3	**Image du nombre**								

Quelle formule doit-il saisir dans les cellules $B1$ et $B3$?

Correction

Il suffit d'écrire :

- Dans la cellule B1 pour les antécédents : $\boxed{= B2/5}$.
- Dans la cellule B3 pour les images : $\boxed{= B2 * 5}$.

Correction de l'exercice 11 page 5 : Avec de la géométrie

1. a. $0 < x < 15$.

b. Les droites (PM) et (AC) sont perpendiculaires à la droite (AB), elles sont donc parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{BP}{AB} = \frac{PM}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

C'est-à-dire $\frac{x}{15} = \frac{PM}{8}$.

Donc $PM = \frac{8}{15}x$.

c. Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a l'égalité suivante : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
C'est-à-dire $BC^2 = 152 + 82 = 289$
D'où $BC = \sqrt{289} = 17$ cm.

On a donc $\frac{x}{15} = \frac{BM}{17}$ d'où $BM = \frac{17}{15}x$.

2. a. Le périmètre du triangle MBP est égal à BP + PM + BM.

Donc $p(x) = x + \frac{8}{15}x + \frac{17}{15}x$.

Ainsi $p(x) = \frac{15}{15}x + \frac{8}{15}x + \frac{17}{15}x = \frac{40}{15}x$.

D'où $p(x) = \frac{8}{3}x$.

p est la fonction linéaire de coeffici t $\frac{8}{3}$.

b. $\frac{8}{3}x$ est un nombre entier lorsque x est un multiple de 3.
Comme $0 < x < 15$, le périmètre de MBP est égal à un nombre entier de cm lorsque x est égal à 3 ou 6 ou 9 ou 12 cm.

Correction de l'exercice 12 page 5 : Avec de la géométrie

En 60 s, une personne marchant sur le tapis parcourt 125 m et une personne marchant à côté du tapis parcourt 75 m soit 50 m de moins.
La vitesse du tapis est donc de 50 m par minute.
La demi-droite correspondant à la personne immobile sur le tapis est celle qui passe par le point $(60\ ;\ 50)$ et par l'origine du repère.