Math93.com

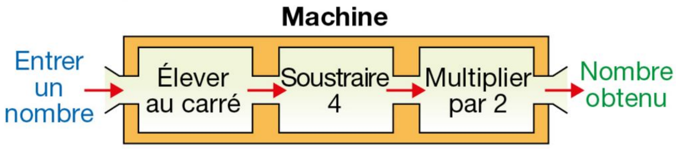
TD 1 - Troisième
Notion de fonction

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Partie I. Vocabulaire et calcul d'images et d'antécédents

Exercice 1. Avec une machine (c)

Voici une machine que l'on assimile à une fonction notée f définie pour tout nombre de départ appartenant à l'ensemble $D = \mathbb{R}$, c'est à dire l'ensemble de tous les nombres connus en 3e.



1. Pour $x = 4$ au départ.

1. a. Si l'on prend 4 comme nombre de départ, vérifier que l'on obtient 24.

....

....

Compléter :

1. b.

$$4 \xrightarrow{f} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

1. c. $f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$

1. d. L'image de $\cdots\cdots\cdots\cdots$ par la fonction f est $\cdots\cdots\cdots\cdots$

1. e. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ est UN antécédent de $\cdots\cdots\cdots\cdots$ par la fonction f.

2. Pour $x = 7$ au départ.

2. a. Si l'on prend 7 comme nombre de départ, quel nombre obtient-on ?

....

....

Compléter :

2. b.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{f} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. c. $f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$

2. d. L'image de $\cdots\cdots\cdots\cdots$ par la fonction f est $\cdots\cdots\cdots\cdots$

2. e. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ est UN antécédent de $\cdots\cdots\cdots\cdots$ par la fonction f.

3. Déterminer l'image de (-8) par la fonction f.

....

....

4. On note x le nombre choisi au départ, quelle est alors l'expression de son image $f(x)$?

....

....

5. Déterminer au moins un antécédent de 0 par la fonction f.

....

....

Exercice 2. Vocabulaire (c)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres dits réels, c'est à dire l'ensemble de tous les nombres connus en 3e.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Compléter :

Notation mathématique	équivalence en français
$f(4) = 3$	L'image de $\cdots\cdots$ par la fonction f est $\cdots\cdots\cdots$
$f(4) = 3$	Un antécédent de $\cdots\cdots$ par la fonction f est $\cdots\cdots\cdots$
$f(0) = -10$	Utiliser le mot antécédent : ....
$f(8) = 0$	Utiliser le mot image : ....
$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$	L'image de 13 par la fonction f est 22
$f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$	Un antécédent de -5 par la fonction f est 14

Exercice 3. Avec une expression algébrique (DM)(c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, et qui à x associe son image $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

1. Calculer l'image de 2 par la fonction f. En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

2. Calculer l'image de (-2) par la fonction f. En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

3. Calculer $f(0)$. En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

4. Calculer $f\left(-\frac{2}{3}\right)$. En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

5. La forme factorisée, c'est ma passion !

5. a. Montrer que pour tout les nombres x on a :

$$f(x) = (2x-1)(x-1)$$

5. b. En déduire des antécédents de 0 par la fonction f.

6. Avec une feuille de calcul.

6. a. Sur une feuille de calcul on cherche à retrouver quelques résultats précédents.

B2 f_x = ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2	-1	0	1	2	3	4
2	f(x)	15	6	1	0	3	10	21
3								

Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B2 avant de la recopier vers la droite ?

6. b. Effectuer ce tableau sur une feuille de calcul.

Exercice 4. SAT

Question 1 (SAT - Pratice test 1 - section 3 - Q10)

$$g(x) = ax^2 + 24$$

For the function g defined above, a is a constant and $g(4) = 8$.
What is the value of $g(-4)$?

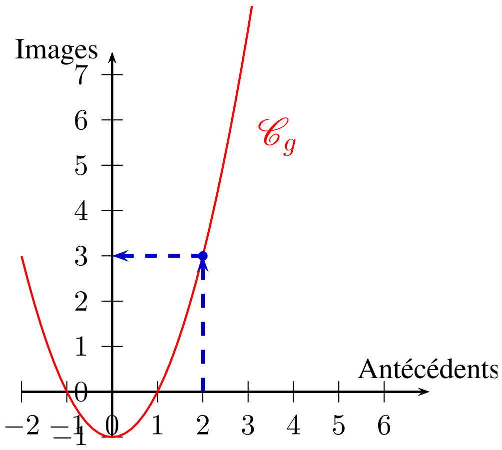
a. 8 **b.** 0 **c.** -1 **d.** -8

Partie II. Lectures d'images et d'antécédents

Exercice 5. Lecture d'images

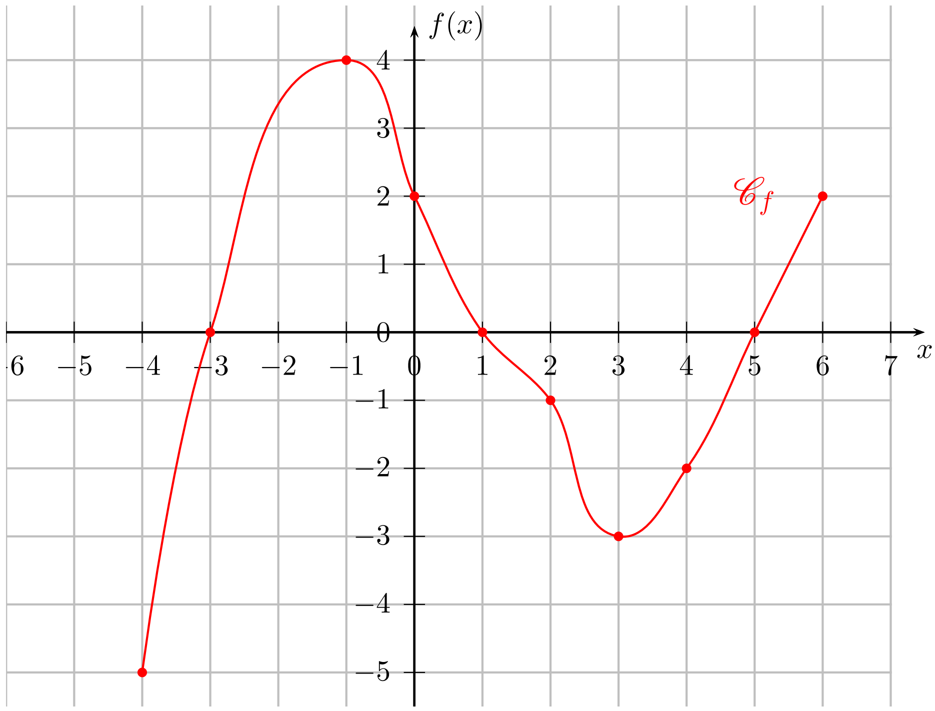
Exemple 1

Lecture d'une image



L'image de 2 par la fonction g est 3.

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[-4\,;\,6]$ et dont la courbe est tracée ci-dessous.



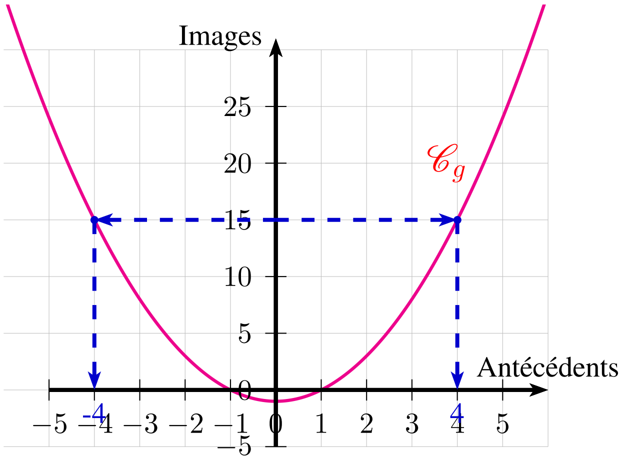
Lire les images par f des entiers relatifs de -4 à 6 et compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Image de x par f soit $f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Exercice 6. Lecture d'antécédents

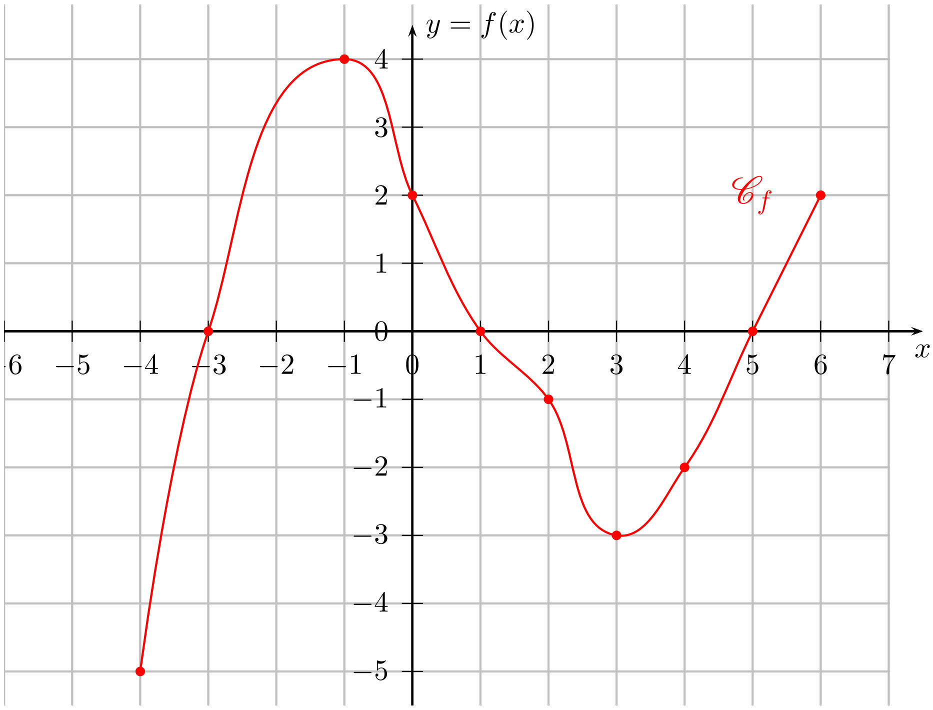
Exemple 2

Lecture d'antécédents éventuels



Par lecture graphique, les antécédents de 15 par la fonction g sont les nombres -4 et 4.

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[-4\,;\,6]$ et dont la courbe est tracée ci-dessous.



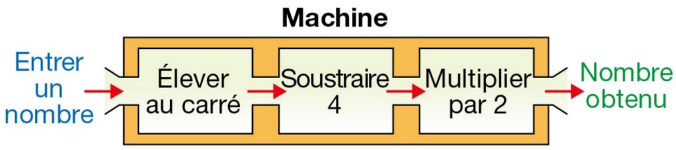
Compléter le tableau suivant en donnant les antécédents éventuels. Un nombre peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

y	Antécédents éventuels de y
5	$\dots$
4	$\dots$
3	$\dots$
2	$\dots$
1	$\dots$
0	$\dots$

y	Antécédents éventuels de y
-1	$\dots$
-2	$\dots$
-3	$\dots$
-4	$\dots$
-5	$\dots$
-6	$\dots$

Partie III. Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 page 1 : avec une machine



1. Pour $x = 4$ au départ.

1. a. Si l'on prend 4 comme nombre de départ, vérifier que l'on obtient 24.

Corrigé

L'image de 4 par f est

$$f(4) = (4^2 - 4) \times 2 = (16 - 4) \times 2 = 24$$

1. b.

$$4 \xrightarrow{f} f(4) = 24$$

1. c. $f(4) = 24$

1. d. L'image de 4 par la fonction f est 24

1. e. 4 est UN antécédent de 24 par la fonction f.

2. Pour $x = 7$ au départ.

2. a. Si l'on prend 7 comme nombre de départ, quel nombre obtient-on ?

Corrigé

L'image de 7 par f est

$$f(7) = (7^2 - 4) \times 2 = (49 - 4) \times 2 = 90$$

2. b.

$$7 \xrightarrow{f} f(7) = 90$$

2. c. $f(7) = 90$

2. d. L'image de 7 par la fonction f est 90

2. e. 7 est UN antécédent de 90 par la fonction f.

3. Déterminer l'image de (-8) par la fonction f.

Corrigé

L'image de (-8) par f est

$$f(-8) = ((-8)^2 - 4) \times 2 = (64 - 4) \times 2 = 120$$

4. On note x le nombre choisi au départ, quelle est alors l'expression de son image $f(x)$?

Corrigé

L'image de x par f est

$$f(x) = (x^2 - 4) \times 2 = 2x^2 - 8$$

5. Déterminer au moins un antécédent de 0 par la fonction f.

Corrigé

Les antécédents de 0 par la fonction f sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2x^2 - 8 = 0 \\ &\iff 2x^2 = 8 \\ &\iff x^2 = 4 \\ &\iff \Big(x = -2\Big) \text{ ou } \Big(x = 2\Big) \end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par la fonction f sont donc $x = 2$ et $x = -2$.

Correction de l'exercice 2 page 2 : vocabulaire

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres dits réels, c'est à dire l'ensemble de tous les nombres connus en 3e.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Notation mathématique	équivalence en français
$f(4)=3$	L'image de 4 par la fonction f est 3 $$4 \xrightarrow{f} 3$$
$f(4)=3$	Un antécédent de 3 par la fonction f est $x=4$
$f(0)=-10$	$$0 \xrightarrow{f} -10$$ Un antécédent de (-10) par f est $x=0$.
$f(8)=0$	$$8 \xrightarrow{f} 0$$ L'image de 8 par f est 0.
$f(13)=22$	L'image de 13 par la fonction f est 22 $$13 \xrightarrow{f} 22$$
$f(14)=-5$	Un antécédent de -5 par la fonction f est $x=14$ $$14 \xrightarrow{f} -5$$

Correction de l'exercice 3 page 2 : expression

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, et qui à x associe son image $f(x)=2x^2-3x+1$.

$$x \xrightarrow{f} f(x)=2x^2-3x+1$$

1. Calculer l'image de 2 par la fonction f.
En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

Corrigé

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\times 2^2-3\times 2+1 \\ &= 2\times 4-6+1 \\ &= 8-6+1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(2)=3}$$

L'image de $x=2$ par f est 3 et un antécédent de 3 par f est $x=2$.

2. Calculer l'image de (-2) par la fonction f.
En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

Corrigé

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2\times(-2)^2 - 3\times(-2) + 1 \\ &= 2\times 4 + 6 + 1 \\ &= 8 + 6 + 1 \\ \boxed{f(-2) = 15} \end{aligned}$$

L'image de $x = -2$ par f est 15 et un antécédent de 15 par f est $x = -2$.

3. Calculer $f(0)$.
En déduire une phrase avec le mot image et une autre avec le mot antécédent.

Corrigé

$$\begin{aligned} f(0) &= 2\times 0^2 - 3\times 0 + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 \\ \boxed{f(0) = 1} \end{aligned}$$

L'image de $x = 0$ par f est 1 et un antécédent de 1 par f est $x = 0$.

4. La forme factorisée, c'est ma passion !

4. a. Montrer que pour tout les nombres x on a :

$$f(x) = (2x-1)(x-1)$$

Corrigé

SURTOUT NE PAS ECRIRE $f(x) =$ au début !
Pour tout réel x on a en développant la forme factorisée donnée :

$$\begin{aligned} (2x-1)(x-1) &= 2x^2 - 2x - x + 1 \\ &= \underline{2x^2 - 3x + 1} = f(x) \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression de $f(x)$ donc on peut dire que pour tous les nombres réels x on a :

$$\boxed{f(x) = (2x-1)(x-1)}$$

4. b. En déduire des antécédents de 0 par la fonction f.

Corrigé

Les antécédents de 0 par la fonction f sont les éventuelles solutions de l'équation :

$$f(x) = 0$$

Même si l'équation produit nul n'est pas encore traitée, il est facile de comprendre que ce produit de facteur sera nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (2x-1)(x-1) = 0 \\ &\iff \Big(2x-1=0\Big) \text{ ou } \Big(x-1=0\Big) \\ &\iff \Big(x=\frac{1}{2}\Big) \text{ ou } \Big(x=1\Big) \end{aligned}$$

Les antécédents de 0 par la fonction f sont donc $x = 1$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

5. Avec une feuille de calcul.

5. a. Sur une feuille de calcul on cherche à retrouver quelques résultats précédents.

B2 = ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-2	-1	0	1	2	3	4
2	f(x)	15	6	1	0	3	10	21
3								

Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B2 avant de la recopier vers la droite ?

Corrigé

$$\boxed{=(2*B1-1)*(B1-1)} \text{ ou } \boxed{=2*B1\bigwedge 2-3*B1+1}$$

5. b. Effectuer ce tableau sur une feuille de calcul.