



TD 1 - Troisième

Transformations du plan

Symétries, translations et rotations

Certains des exercices qui suivent sont tirés des épreuves du brevet des collèges. Parfois adaptés ou allégés pour rester conforme au programme de la classe de quatrième. Ces exercices suivis du symbole (c) sont corrigés en fin de TD

Partie I. Symétries

Exercice 1. Symétrie centrale (reflection about a point) (c)

On se place le repère du plan (Cartesian coordinate system) ci-dessous :

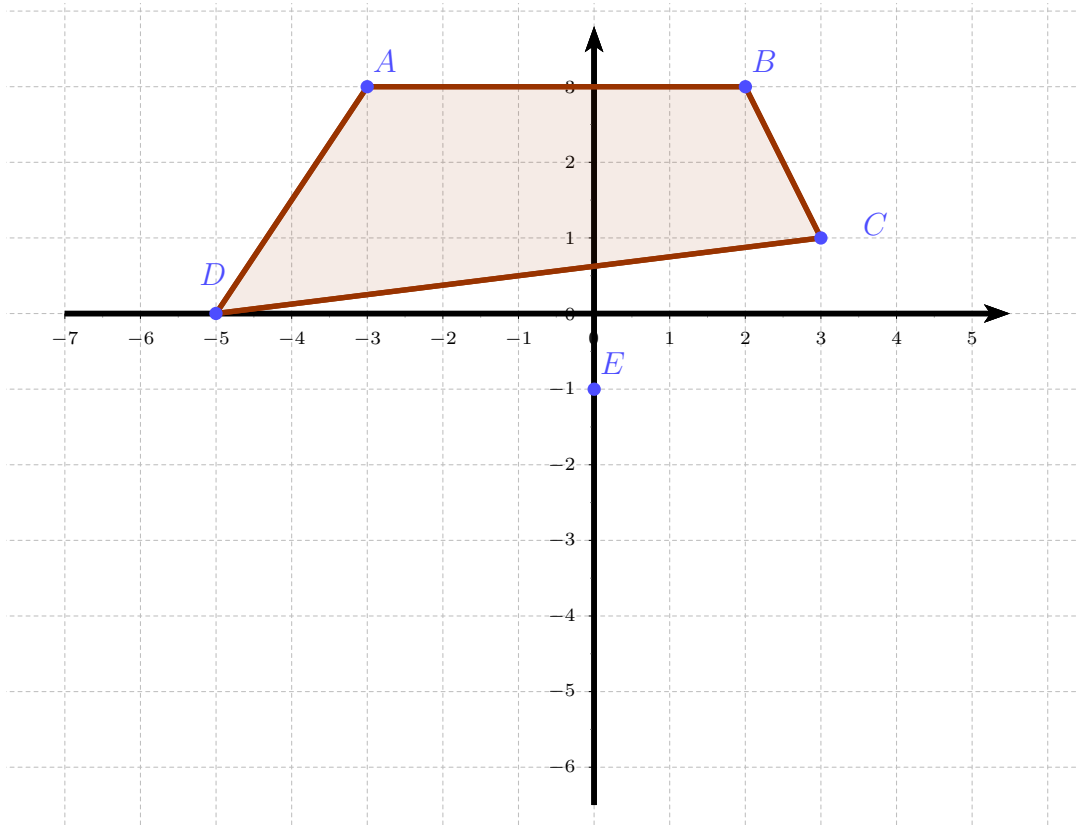
1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D et E :

.....
.....

2. Construire le symétrique du quadrilatère ABCD par rapport au point E. On le nommera A'B'C'D'

3. Donner les coordonnées des points A', B', C', D' :

.....
.....



Exercice 2. Symétrie axiale (reflection about a line) (c)

On se place le repère du plan (*Cartesian coordinate system*) ci-dessous :

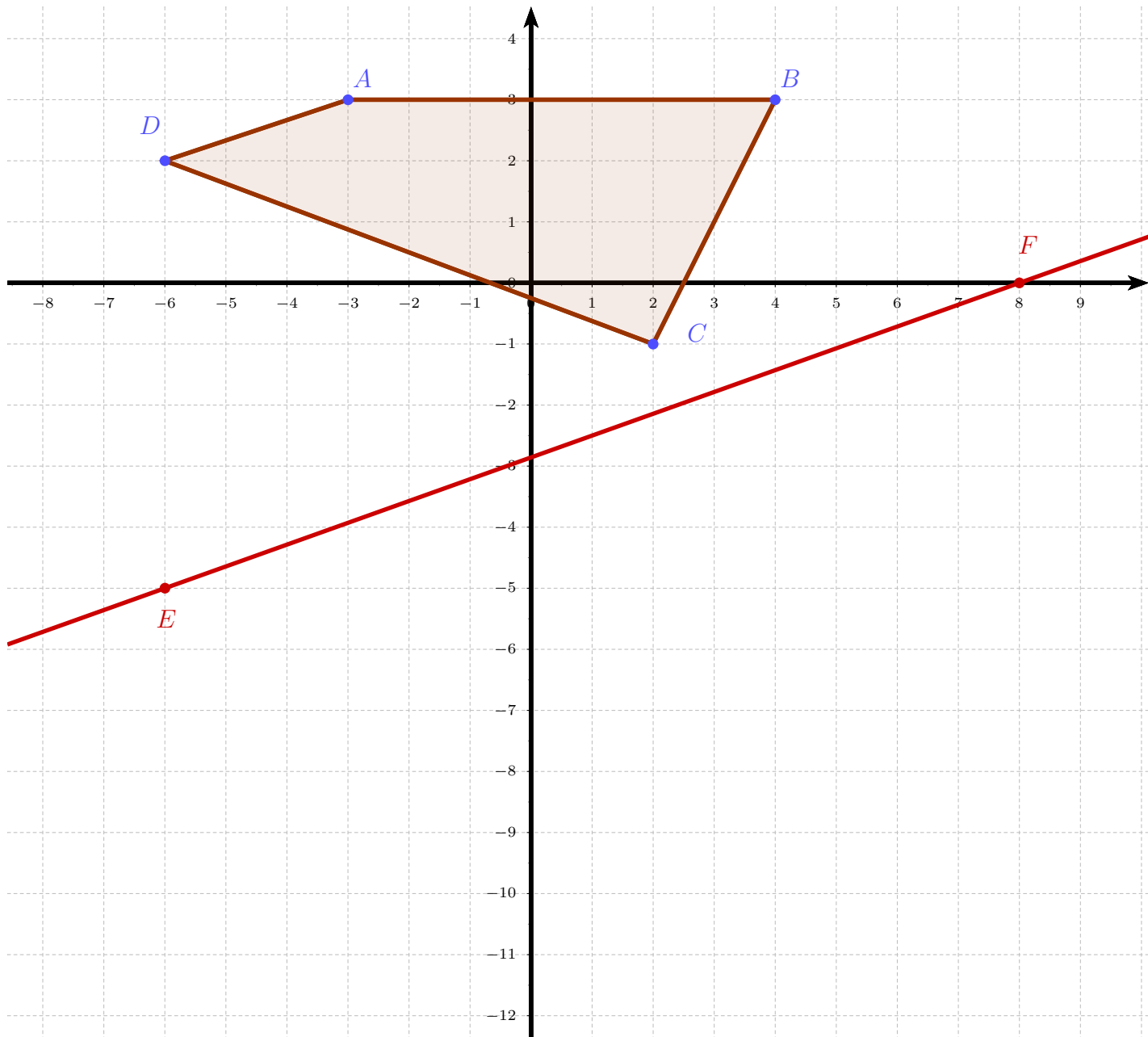
1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E et F :

.....
.....

2. Construire le symétrique du quadrilatère ABCD par rapport à la droite (EF). On le nommera A'B'C'D'

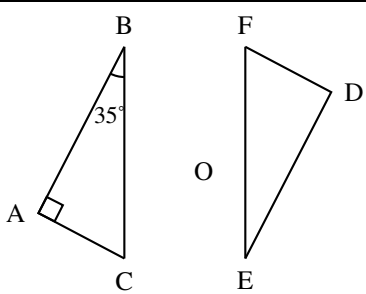
3. Donner les coordonnées des points A', B', C', D' :

.....
.....



Exercice 3. D'après Amérique du Sud 30 novembre 2018

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Pour chacune des questions, écrire sur la copie, le numéro de la question et la lettre de la bonne réponse. Aucune justification n'est attendue.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	 <p>Le triangle DEF est le symétrique du triangle ABC par rapport au point O. La mesure de l'angle DEF est :</p>	35°	55°	65°

Exercice 4. D'après Brevet : un polygone (c)

1. Construire un triangle équilatéral FIO de 5 cm de côté.
2. Construire le point R, symétrique de I par rapport au point O.
3. Construire le point E, symétrique de I par rapport à la droite (OF).
4. Construire le point U, symétrique de F par rapport au point O.
5. Construire le point G, symétrique de F par rapport à la droite (IO).
6. Tracer le polygone FIGURE. Quelle semble être sa nature ?

Exercice 5. Testez-vous sur Kwyk

↪ Testez vous sur Kwyk : TD 17A - Symétries axiales et centrales.

Partie II. Translations

Exercice 6. Translation (c)

On se place le repère du plan (*Cartesian coordinate system*) ci-dessous :

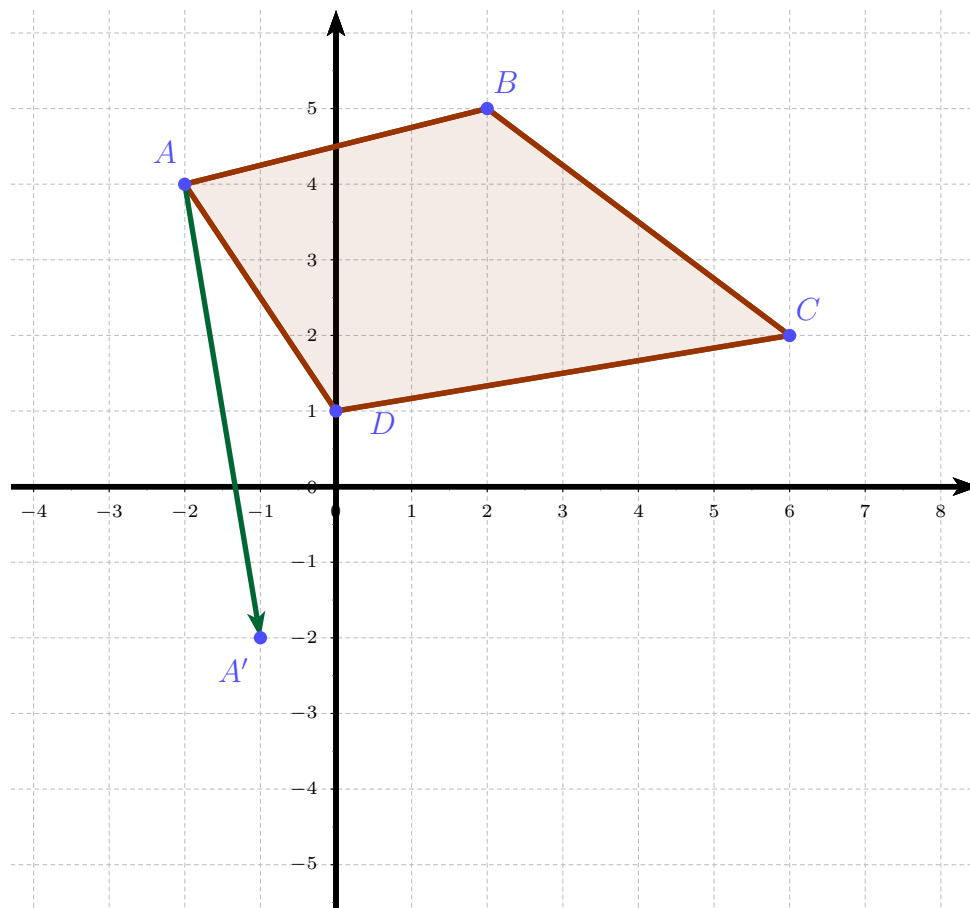
1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, A' :

.....
.....

2. Construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation qui transforme A en A'. On le nommera A'B'C'D'

3. Donner les coordonnées des points A', B', C', D' :

.....
.....



Exercice 7. D'après Pondichéry 2018 (c)

Remarque : cet exercice était sur 9 points sur 100.



Pavage du plan / Tessellation

- Un pavage du plan est un ensemble de portions du plan, par exemple des polygones, dont l'union est le plan tout entier, sans recouvrement.
- A tessellation or tiling is the covering of a surface, often a plane, using one or more geometric shapes, called tiles, with no overlaps and no gaps.

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.

Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone ci-dessous à droite (figure 2) qui peut être réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

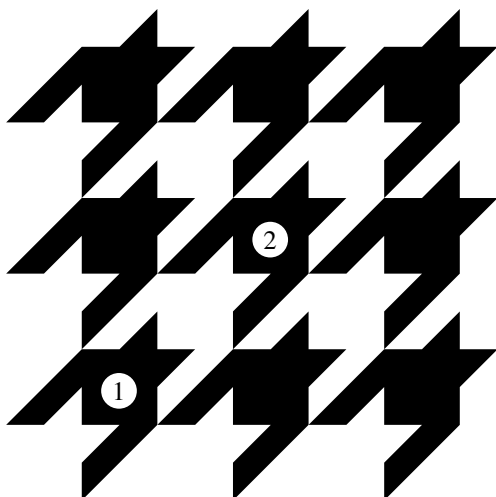


Figure 1

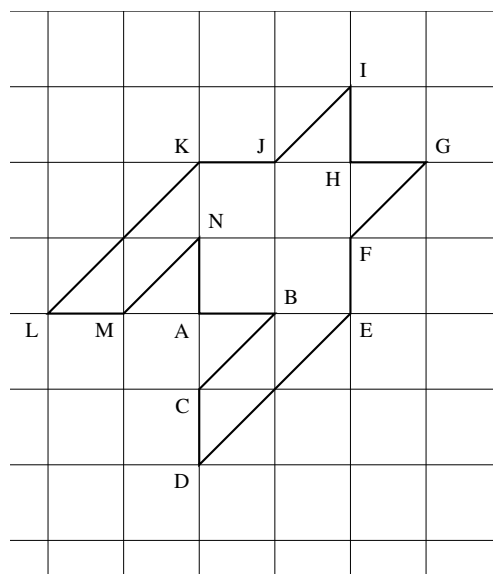


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?
2. Dans cette question, on considère que : $AB = 1$ cm (figure 2).
Déterminer l'aire d'un motif pied-de-coq.
3. Marie affirme « si je divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera aussi divisée par 2 ». A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

Exercice 8. Testez-vous sur Kwyk

↔ Testez vous sur Kwyk : TD 17B - Translations.

Partie III. Rotations

Exercice 9. Rotation (c)

On se place le repère du plan (*Cartesian coordinate system*) ci-dessous :

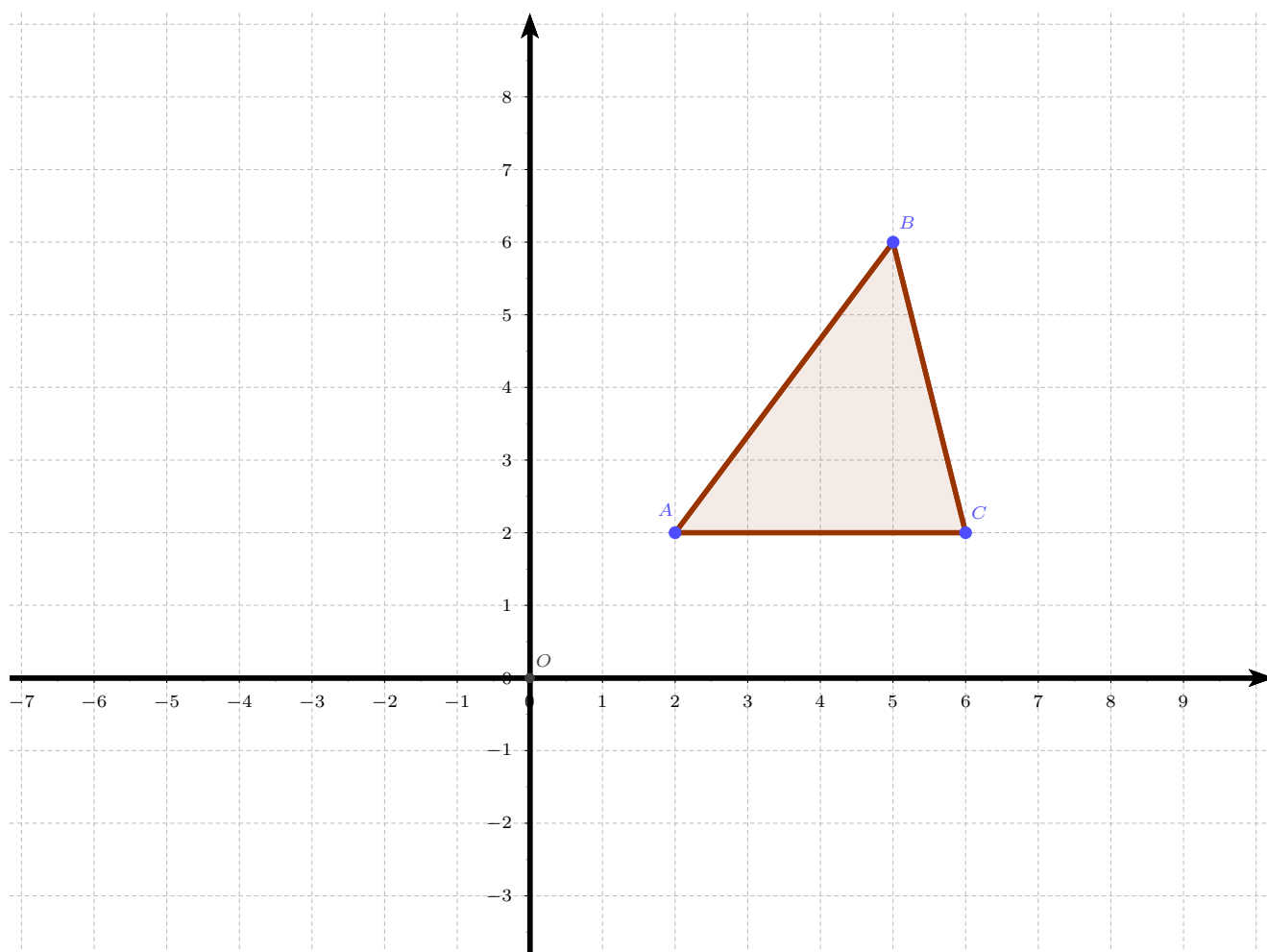
1. Donner les coordonnées des points A, B, C, :

.....
.....

2. Construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle 60 degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

3. Donner les coordonnées des points A', B', C' :

.....
.....



Exercice 10. Testez-vous sur Kwyk

↪ Testez vous sur Kwyk : TD 17C - Rotations.

Partie IV. Transformations du plan

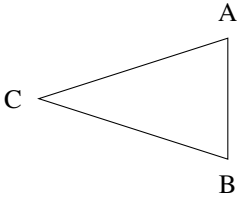
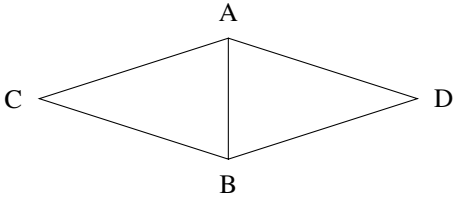
Exercice 11. D'après Amérique du Nord 5 juin 2018 (c)

6 points/100

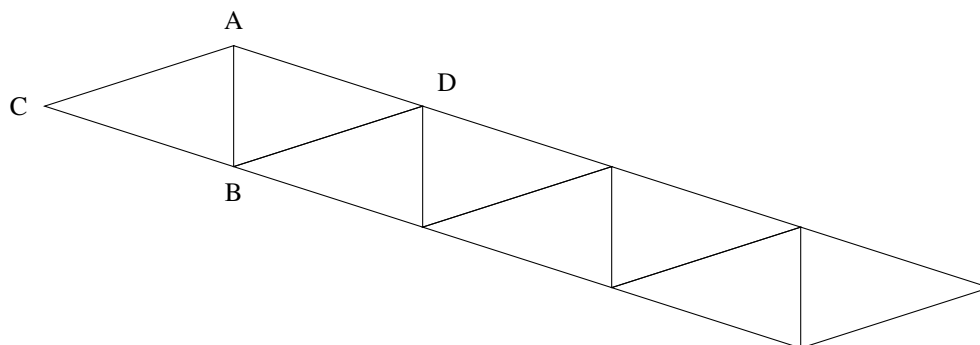
Gaspard travaille avec un logiciel de géométrie dynamique pour construire une frise.

Il a construit un triangle ABC isocèle en C (motif 1) puis il a obtenu le losange ACBD (motif 2).

Voici les captures d'écran de son travail.

Motif 1	Motif 2
	

1. Préciser une transformation permettant de compléter le motif 1 pour obtenir le motif 2.
2. Une fois le motif 2 construit, Gaspard a appliqué à plusieurs reprises une translation. Il obtient ainsi la frise ci-dessous. Préciser de quelle translation il s'agit.



Exercice 12. D'après Brevet des collèges Polynésie 7 septembre 2020



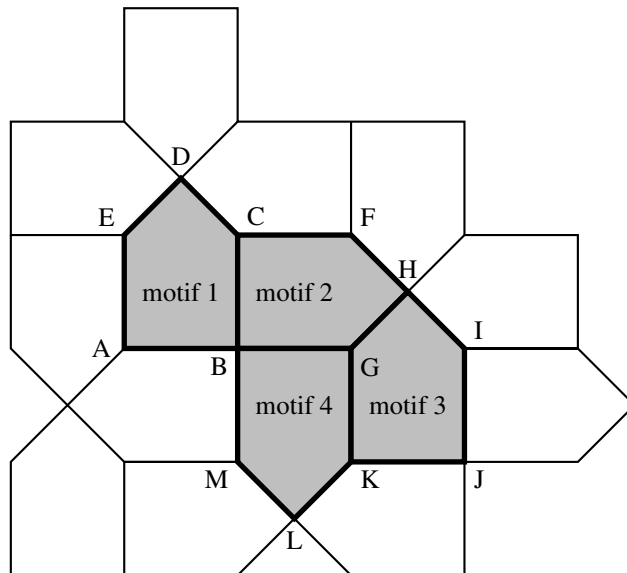
Pavage du plan / tessellation

- Un pavage du plan est un ensemble de portions du plan, par exemple des polygones, dont l'union est le plan tout entier, sans recouvrement.
- A tessellation or tiling is the covering of a surface, often a plane, using one or more geometric shapes, called tiles, with no overlaps and no gaps.

On réalise un pavage du plan en partant du motif initial et en utilisant différentes transformations du plan.

Dans chacun des quatre cas suivants, donner sans justifier une transformation du plan qui permet de passer :

1. Du motif 1 au motif 2
2. Du motif 1 au motif 3
3. Du motif 1 au motif 4
4. Du motif 2 au motif 3



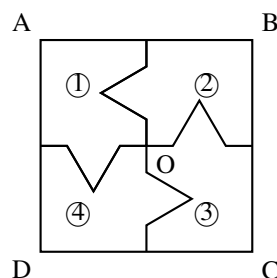
Exercice 13. D'après Brevet des collèges Antilles sept 2020

Dans cet exercice, le carré ABCD n'est pas représenté en vraie grandeur.

Aucune justification n'est attendue pour les questions 1. et 2. On attend des réponses justifiées pour la question 3.

1.

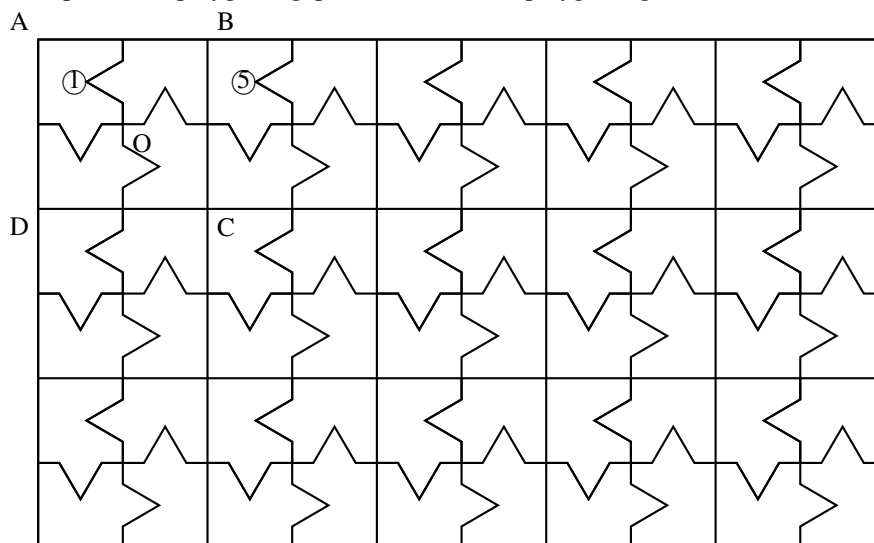
On considère le carré ABCD de centre O représenté ci-contre, partagé en quatre polygones superposables, numérotés ①, ②, ③, et ④.



1. a. Quelle est l'image du polygone ① par la symétrie centrale de centre O ?

2. La figure ci-dessous est une partie de pavage dont un motif de base est le carré ABCD de la question 1.

Quelle transformation partant du polygone ① permet d'obtenir le polygone ⑤ ?



3. On souhaite faire imprimer ces motifs sur un tissu rectangulaire de longueur 315 cm et de largeur 270 cm.

On souhaite que le tissu soit entièrement recouvert par les carrés identiques à ABCD, sans découpe et de sorte que le côté du carré mesure un nombre entier de centimètres.

3. a. Montrer qu'on peut choisir des carrés de 9 cm de côté.

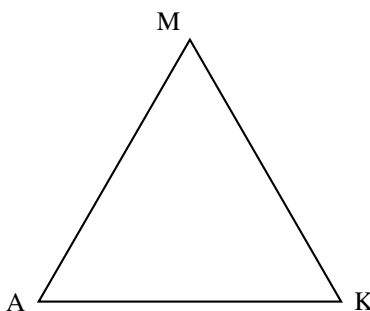
3. b. Dans ce cas, combien de carrés de 9 cm de côté seront imprimés sur le tissu ?

Exercice 14. D'après brevet Amérique du Nord

Pour cet exercice, on laissera visible les traits de construction mais aucune justification n'est demandée.

Soit le triangle équilatéral MAK de côté mesurant 4 cm.

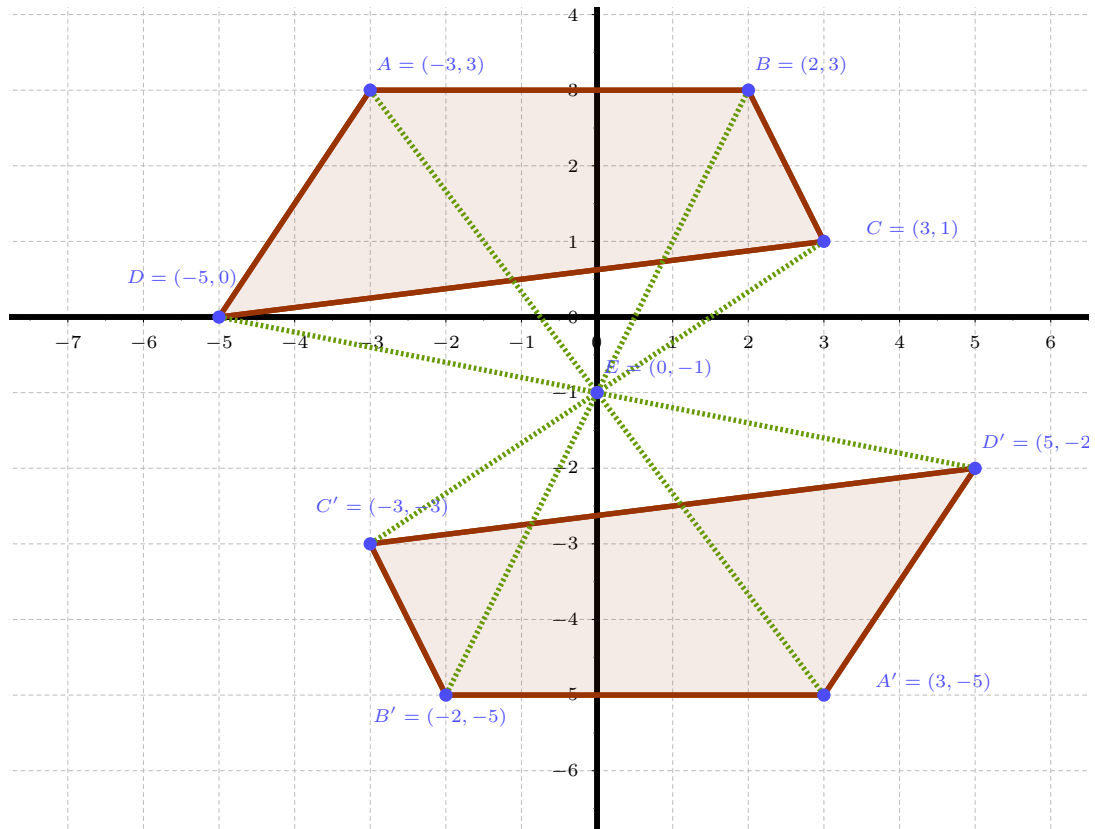
1.
 1. a. Construire le point I image de M dans la rotation de centre K et d'angle 120° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
 1. b. Quelle est la nature exacte du triangle AKI ? (On ne demande pas de justification.)
2. Construire le point S symétrique de M par rapport à K.
3. Construire le point O tel que K soit le milieu de [AO].
 3. a. Construire le point N image de K dans la translation qui transforme A en M (on dit que c'est la translation de vecteur \overrightarrow{AM}).
 3. b. Quelle est la nature exacte du quadrilatère AMNK ? (On ne demande pas de justification.)
4.
 - a. Tracer le polygone MAISON.
 - b. Quelle est la nature exacte de ce polygone ? (On ne demande pas de justification.)



Partie V. Corrections

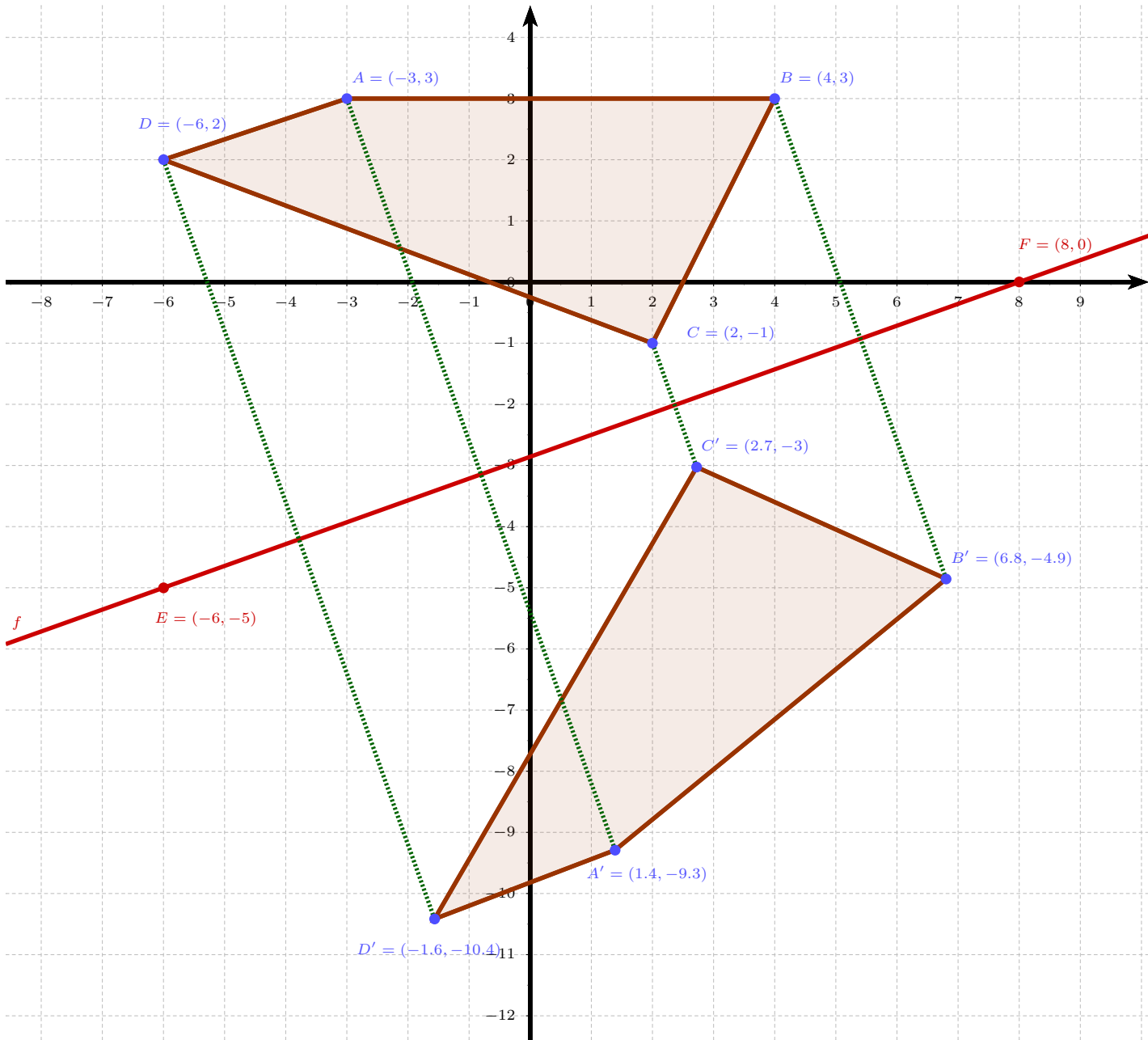
Correction de l'exercice 1

=> lien geogebra



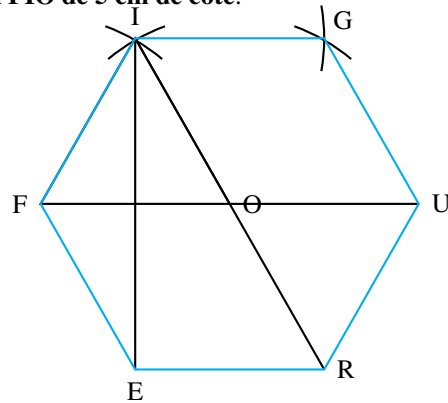
Correction de l'exercice 2

=> lien geogebra



Correction de l'exercice 4 page 3

1. Construire un triangle équilatéral FIO de 5 cm de côté.



2. Construire le point R, symétrique de I par rapport au point O.

Voir tous les tracés ci-dessus.

3. Construire le point E, symétrique de I par rapport à la droite (OF).

4. Construire le point U, symétrique de F par rapport au point O.

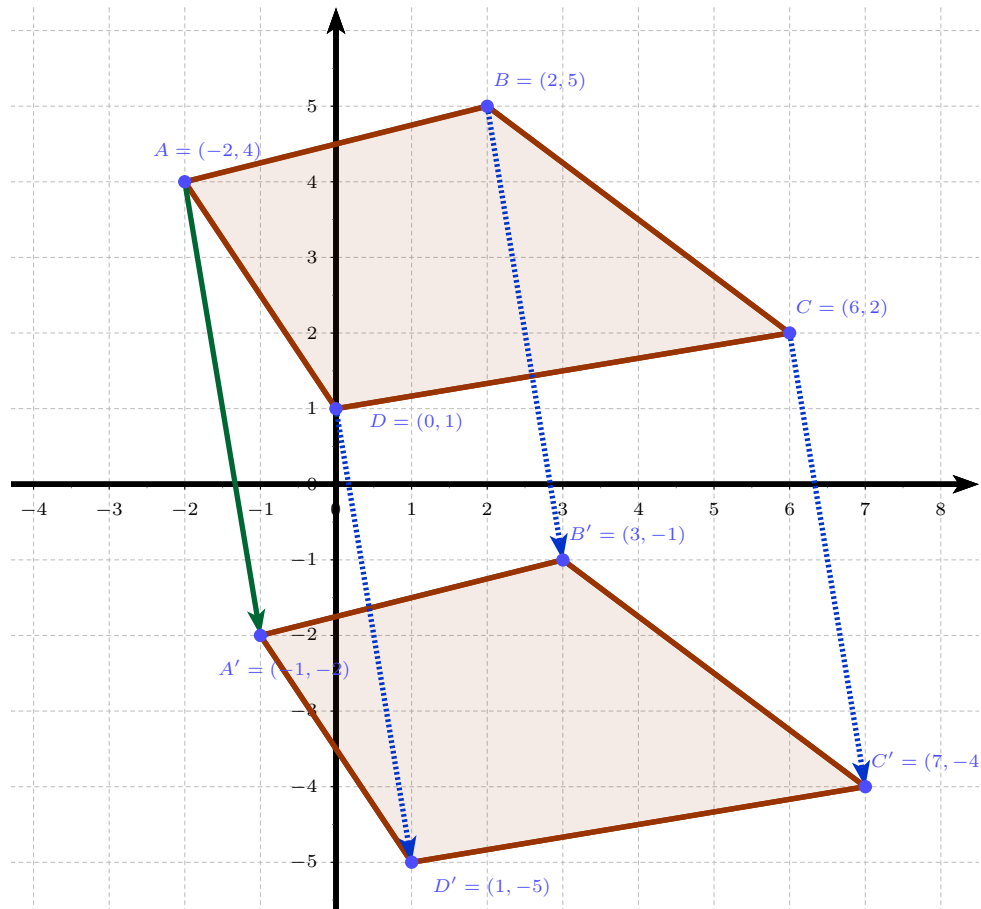
5. Construire le point G, symétrique de F par rapport à la droite (IO).

6. Tracer le polygone FIGURE. Quelle semble être sa nature ?

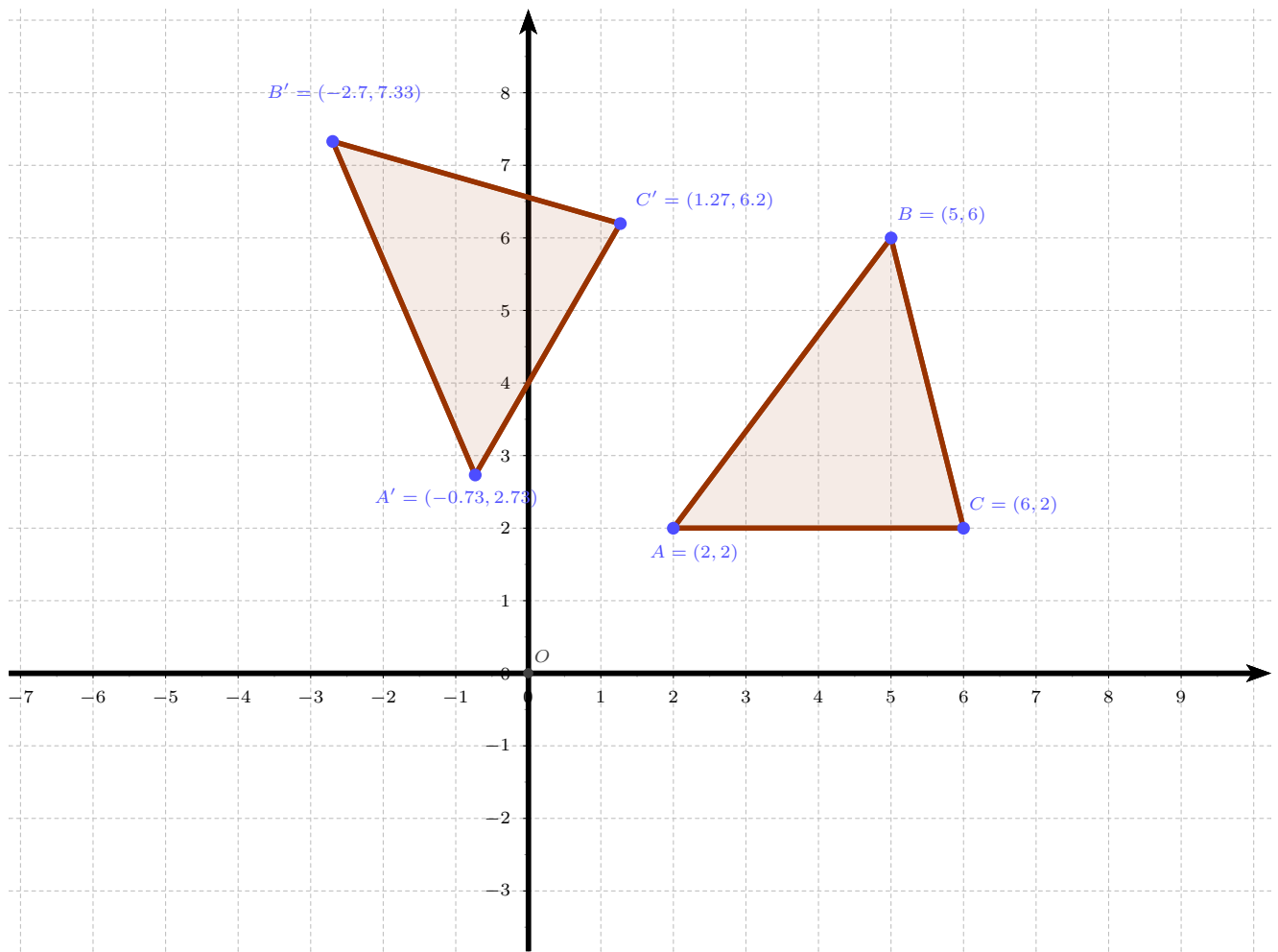
FIGURE semble être un hexagone régulier de côté 5 cm.

Correction de l'exercice 6 page 4

=> lien geogebra



Correction de l'exercice 9 page 6 : rotation



Correction de l'exercice 7 (Pondichéry 2018)

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.

Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone ci-dessous à droite (figure 2) qui peut être réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

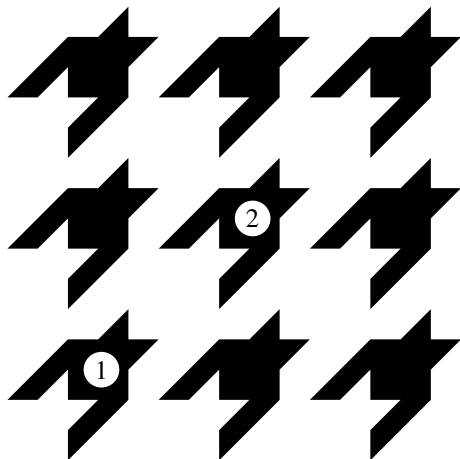


Figure 1

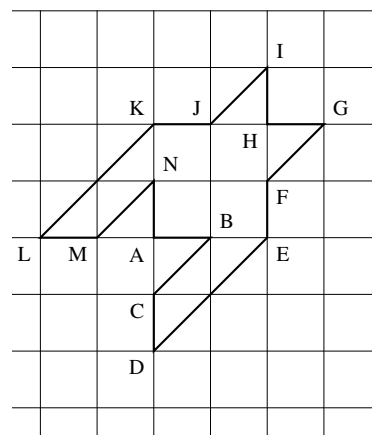


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?



Corrigé

Une translation permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1.

2. Dans cette question, on considère que : $AB = 1$ cm (figure 2). Déterminer l'aire d'un motif pied-de-coq.



Corrigé

Le quadrillage étant régulier, le motif est composé d'un carré AEHK d'aire $AE^2 = 2^2 \text{ cm}^2$ et de 8 triangles rectangles isocèles ayant chacun une aire égale à la moitié de celle d'un carré unité soit $8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ cm}^2$.

L'aire du motif est donc :

$$\mathcal{A} = 4 + 4 = \underline{8 \text{ cm}^2}$$

3. Marie affirme « si je divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera aussi divisée par 2 ». A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

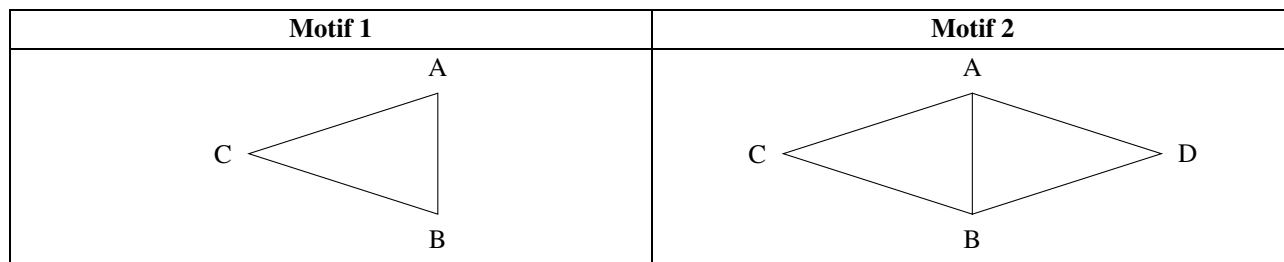


Corrigé

Par propriété, si on divise les aires par un réel k strictement positif, les aires le sont par k^2 (et les volumes par k^3). Donc ici, si on divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera divisée par $2^2 = 4$.

Correction de l'exercice 11 (Am. Nord 2018)

Gaspar travaille avec un logiciel de géométrie dynamique pour construire une frise. Il a construit un triangle ABC isocèle en C (motif 1) puis il a obtenu le losange $ACBD$ (motif 2). Voici les captures d'écran de son travail.



1. Préciser une transformation permettant de compléter le motif 1 pour obtenir le motif 2.



Corrigé

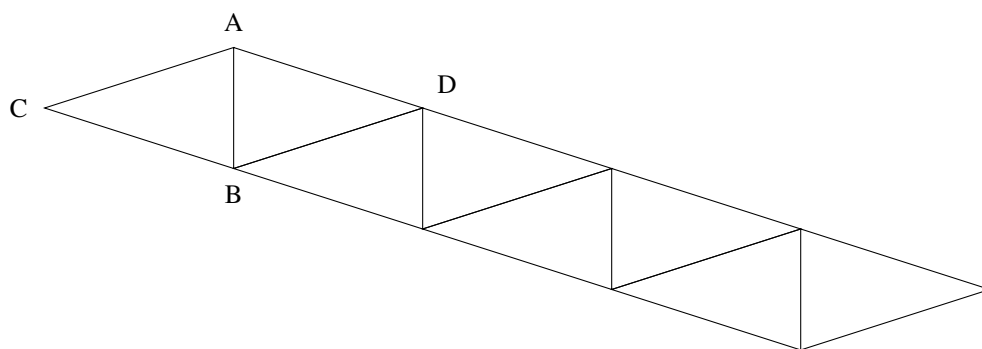
La symétrie d'axe (AB) est une transformation permettant de compléter le motif 1 pour obtenir le motif 2.

2. Une fois le motif 2 construit, Gaspar a appliqué à plusieurs reprises une translation. Il obtient ainsi la frise ci-dessous. Préciser de quelle translation il s'agit.



Corrigé

Gaspar a utilisé la translation qui transforme A en D (qui est également celle qui transforme C en B).
On verra en seconde que cette translation est celle de vecteur \vec{AD} ou \vec{CB} .

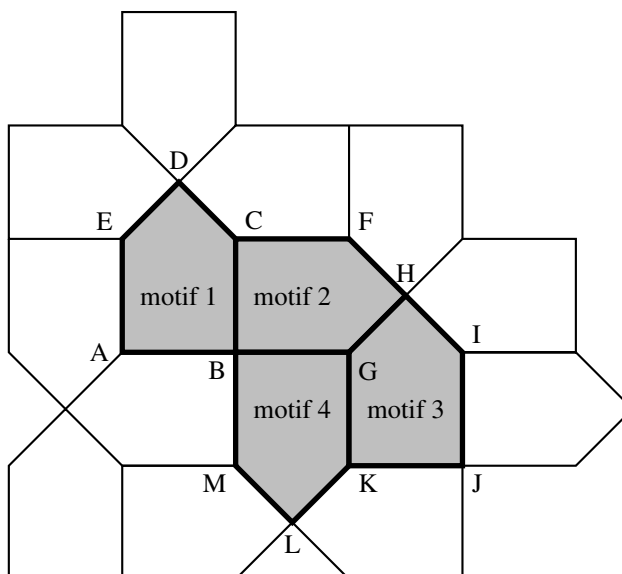


Correction de l'exercice 12 page 8

On réalise un pavage du plan en partant du motif initial et en utilisant différentes transformations du plan.

Dans chacun des quatre cas suivants, donner sans justifier une transformation du plan qui permet de passer :

1. Du motif 1 au motif 2
2. Du motif 1 au motif 3
3. Du motif 1 au motif 4
4. Du motif 2 au motif 3



1. Du motif 1 au motif 2



Corrigé

| La rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens horaire.

2. Du motif 1 au motif 3



Corrigé

| La translation de vecteur \overrightarrow{AK} .

3. Du motif 1 au motif 4



Corrigé

| La rotation de centre B et d'angle 180° (ou symétrie autour de B).

4. Du motif 2 au motif 3



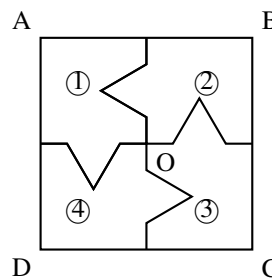
Corrigé

| La rotation de centre H et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.

Correction de l'exercice 13 page 9

1. On considère le carré ABCD de centre O représenté ci-contre, partagé en quatre polygones superposables, numérotés ①, ②, ③, et ④.

1. a. Quelle est l'image du polygone ① par la symétrie centrale de centre O ?



Corrigé

L'image du polygone ① par la symétrie centrale de centre O est le polygone ③.

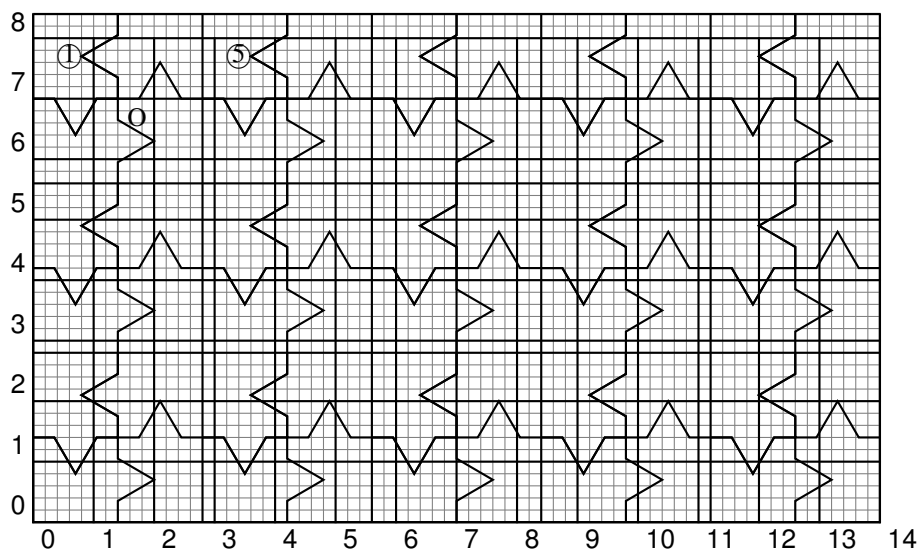
2. La figure ci-dessous est une partie de pavage dont un motif de base est le carré ABCD de la question 1.

Quelle transformation partant du polygone ① permet d'obtenir le polygone ⑤ ?



Corrigé

On passe du polygone ① au polygone ⑤ par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .



3. On souhaite faire imprimer ces motifs sur un tissu rectangulaire de longueur 315 cm et de largeur 270 cm.

On souhaite que le tissu soit entièrement recouvert par les carrés identiques à ABCD, sans découpe et de sorte que le côté du carré mesure un nombre entier de centimètres.

3. a. Montrer qu'on peut choisir des carrés de 9 cm de côté.



Corrigé

Il faut que la longueur côté du carré divise 315 et aussi 270.

Or

$$315 = 5 \times 63 = 5 \times 7 \times 9 = 3^2 \times 5 \times 7$$

et

$$270 = 27 \times 10 = 3^3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^3 \times 5$$

On constate que $3^2 = 9$ est un diviseur commun à 315 et à 270 : on peut donc imprimer des carrés de côté 9 cm.

3. b. Dans ce cas, combien de carrés de 9 cm de côté seront imprimés sur le tissu ?



Corrigé

On a $315 = 9 \times 35$: il rentre 35 carrés dans la longueur ;

$270 = 9 \times 30$: il rentre 30 carrés dans la largeur.

Il y a donc $35 \times 30 = 1\,050$ motifs imprimés sur le tissu.