Math93.com

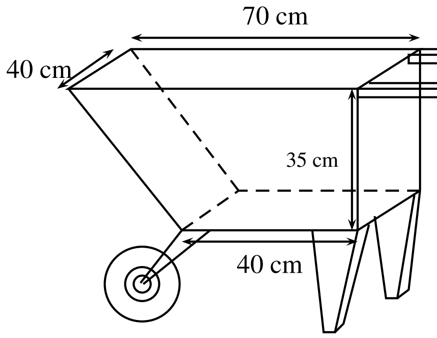
TD 1 - Troisième
Volume et espace

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

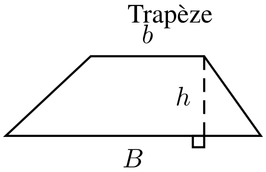
Partie I. Exercices du brevet

Exercice 1. Brevet Centres étrangers 18 juin 2018 (c)

La fleur de sel est la mince couche de cristaux blancs qui se forme et affleure la surface des marais salants. Chaque soir, Jean cueille la fleur de sel à la surface des carreaux. Pour transporter sa récolte, il utilise une brouette comme sur le schéma ci-dessous.

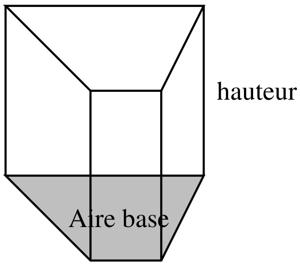


Trapèze



$$\text{Aire} = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

Prisme droit



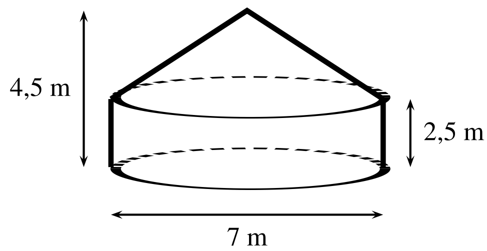
Volume = Aire base $\times$ hauteur

1. Montrer que cette brouette a un volume de 77 litres.
2. Sachant que 1 litre de fleur de sel pèse 900 grammes, calculer la masse en kg du contenu d'une brouette remplie de fleur de sel.

Exercice 2. Brevet des collèges Asie 25 juin 2018 (c)

Samia vit dans un appartement dont la surface au sol est de 35 m^2.
Elle le compare avec une yourte, l'habitat traditionnel mongol.

On modélise cette yourte par un cylindre et un cône.

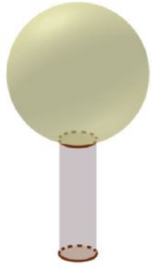


On rappelle les formules suivantes :
Aire du disque $= \pi \times \text{rayon}^2$
Volume du cylindre $= \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$
Volume du cône $= \frac{1}{3}\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

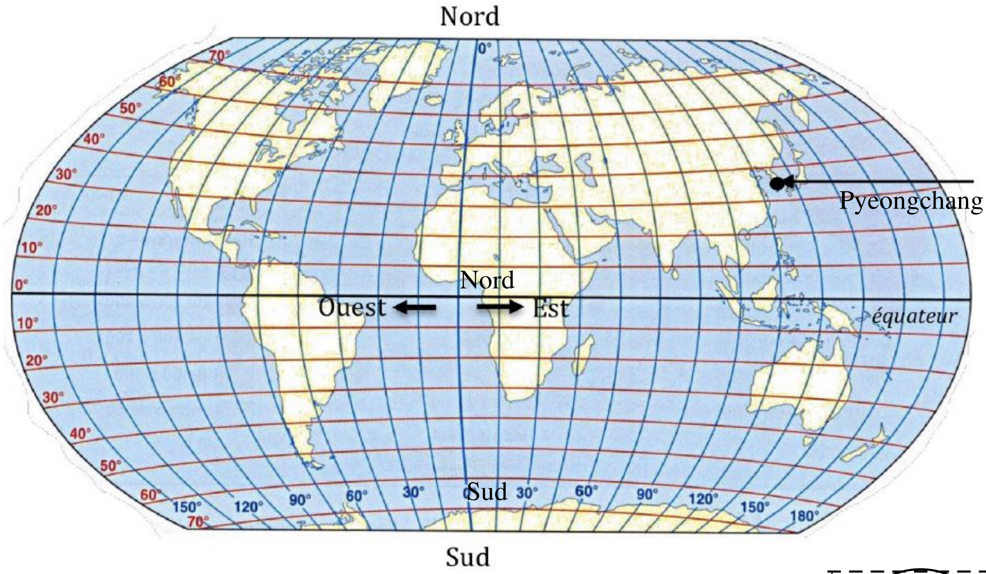
1. Montrer que l'appartement de Samia offre une plus petite surface au sol que celle de la yourte.
2. Calculer le volume de la yourte en m^3.
3. Sarnia réalise une maquette de cette yourte à l'échelle $\frac{1}{25}$.
Quelle est la hauteur de la maquette ?

Exercice 3. Brevet des collèges Métropole juin 2018 (c)

Le gros globe de cristal est un trophée attribué au vainqueur de la coupe du monde de ski.
Ce trophée pèse 9 kg et mesure 46 cm de hauteur.

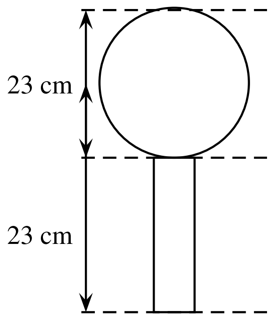


1. Le biathlète français Martin Fourcade a remporté le sixième gros globe de cristal de sa carrière en 2017 à Pyeongchang en Corée du Sud.
Donner approximativement la latitude et la longitude de ce lieu repéré sur la carte ci-dessous.



4. On considère que ce globe est composé d'un cylindre en cristal de diamètre 6cm, surmonté d'une boule de cristal. Voir schéma ci -contre. Montrer qu'une valeur approchée du volume de la boule de ce trophée est de 6 371 cm^3.

5. Marie affirme que le volume de la boule de cristal représente environ 90 % du volume total du trophée.
A-t-elle raison ?



Remarque

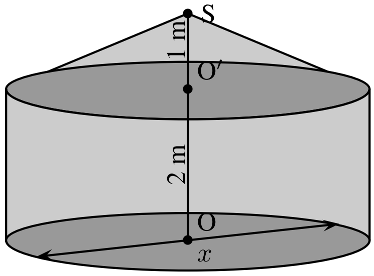
- volume d'une boule de rayon R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $V = \pi r^2 h$.

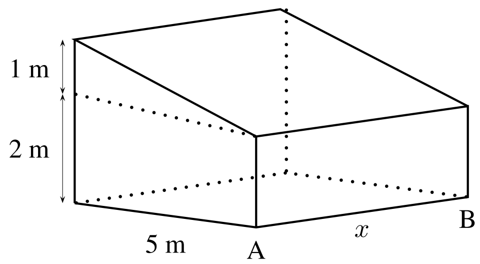
Réponses

1°) latitude : 35° Nord et longitude : 130 Est - 2°) V ≈ 6 371 cm^3 - 3°) $\dfrac{V}{V_T} \approx 0,907376 \approx \underline{91\%}$
Le corrigé complet sur www.math93.com. Exercice 1.

Exercice 4. Brevet des collèges Nouvelle-Calédonie 14 décembre 2020 (c)

Nolan souhaite construire une habitation.
Il hésite entre une **case** et une **maison** en forme de prisme droit.
La case est représentée par un cylindre droit d'axe (OO') surmontée d'un cône de révolution de sommet S.
Les dimensions sont données sur les figures suivantes.
x **représente à la fois le diamètre de la case et la longueur AB du prisme droit.**



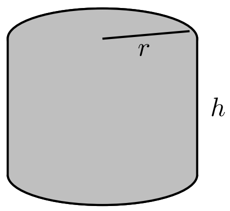


Partie 1 :

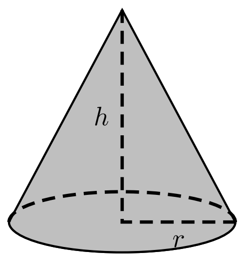
Dans cette partie, on considère que $x = 6$ m.

1. Montrer que le volume exact de la partie cylindrique de la case est 18π m^3.
2. Calculer le volume de la partie conique. Arrondir à l'unité.
3. En déduire que le volume total de la case est environ 66 m^3.

Rappels : Cylindre rayon de base r et de hauteur h — Cône rayon de base r et de hauteur h



Volume $= \pi \times r^2 \times h$



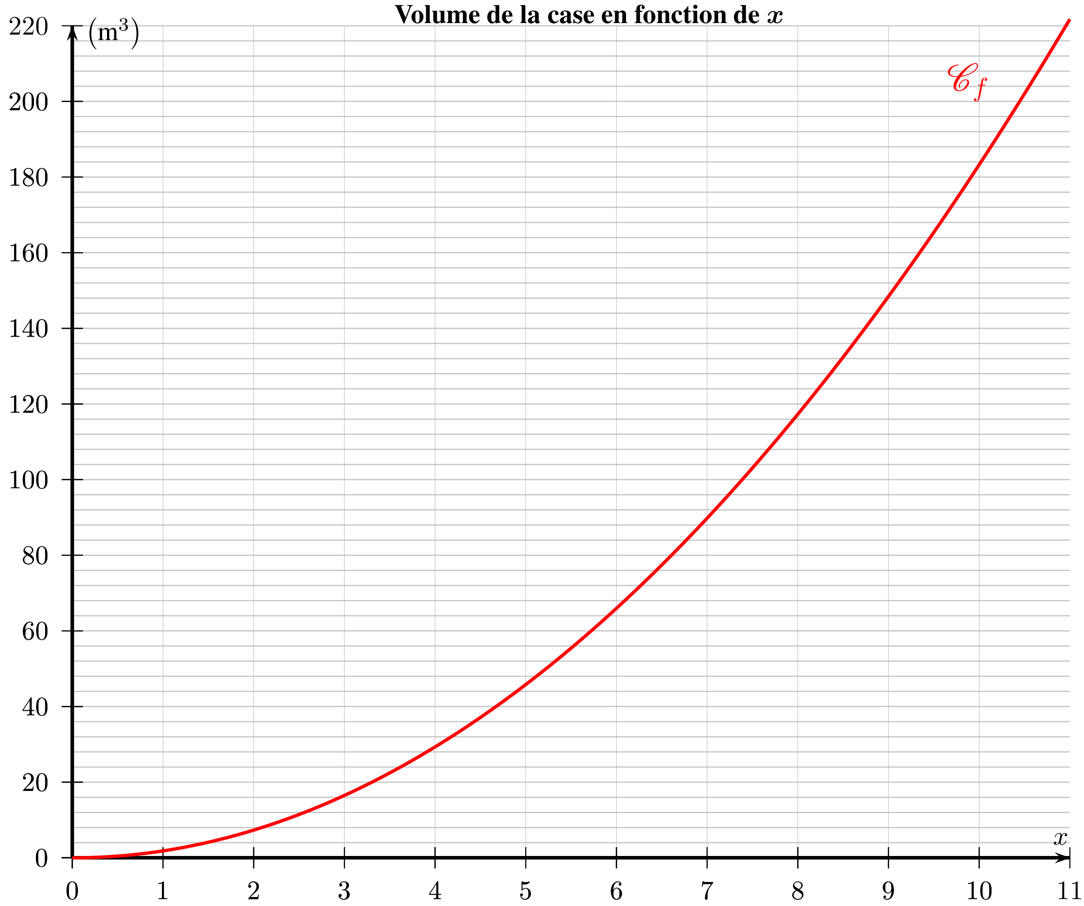
Volume $= \dfrac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

Partie 2 :

Dans cette partie, le diamètre est exprimé en mètre, le volume en m^3.

On a représenté ci-dessous la fonction f qui donne le volume total de la case en fonction de son diamètre x.

Volume de la case en fonction de x



1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du volume d'une case de 7 m de diamètre.
Tracer des pointillés permettant la lecture.

La fonction qui donne le volume de la maison en forme de prisme droit est définie par

$$V(x) = 12,5x.$$

2. Calculer l'image de 8 par la fonction V.

3. Quelle est la nature de la fonction V ?

4. Sur le graphique, tracer la représentation graphique de la fonction V.

Pour des raisons pratiques, la valeur maximale de x est de 6 m. Nolan souhaite choisir la construction qui lui offre le plus grand volume.

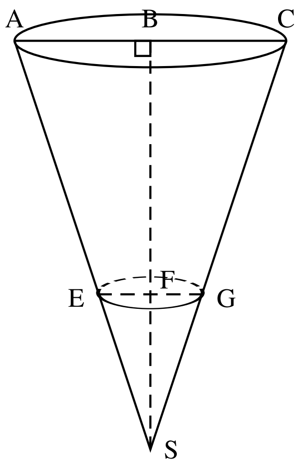
5. Quelle construction devra-t-il choisir ? Justifier.

Exercice 5. Brevet des collèges Grèce 2019 (c)

Dans le village de Jean, une brocante est organisée chaque année lors du premier week-end de juillet. Jean s'est engagé à s'occuper du stand de vente de frites. Pour cela, il fabrique des cônes en papier qui lui serviront de barquette pour les vendre. Dans le fond de chaque cône, Jean versera de la sauce : soit de la mayonnaise, soit de la sauce tomate.

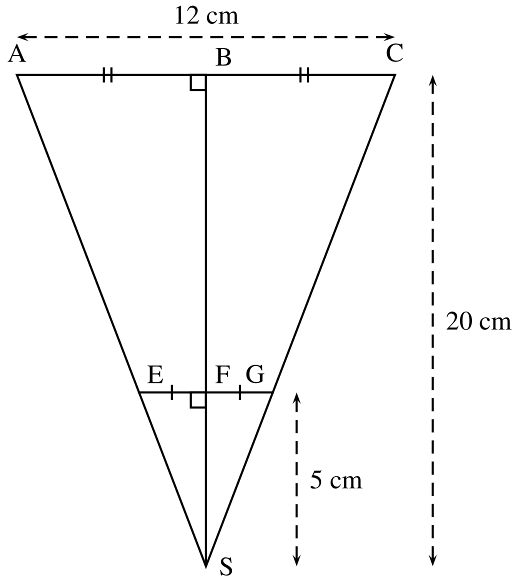
Il décide de fabriquer 400 cônes en papier et il doit estimer le nombre de bouteilles de mayonnaise et de sauce tomate à acheter pour ne pas en manquer.
Voici les informations dont Jean dispose pour faire ses calculs :

Le cône de frites :



La sauce sera versée dans le fond du cône jusqu'au cercle de diamètre [EG].

Le schéma et les mesures de Jean :



B est le milieu de [AC]
F est le milieu de [EG]
BS = 20 cm ; FS = 5 cm ; AC = 12 cm

Les acheteurs :
80 % des acheteurs prennent de la sauce tomate et tous les autres prennent de la mayonnaise.

Les sauces :
La bouteille de mayonnaise est assimilée à un cylindre de révolution dont le diamètre de base est 5 cm et la hauteur est 15 cm.
La bouteille de sauce tomate a une capacité de 500 mL.

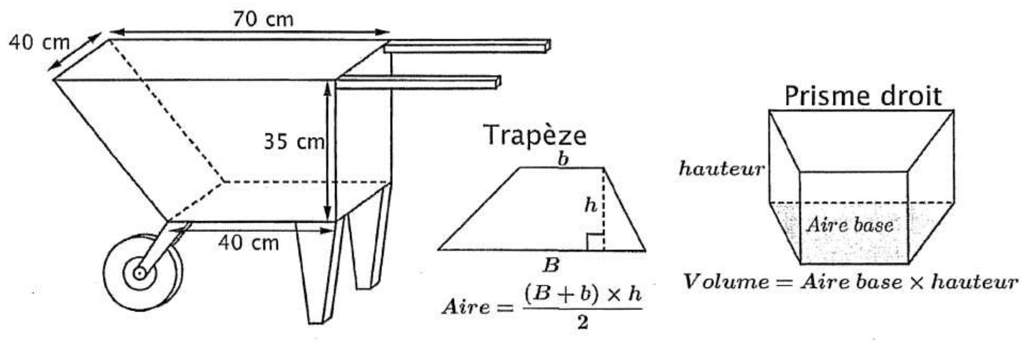
1. Montrer que le rayon [EF] du cône de sauce a pour mesure $1,5$ cm.
2. Montrer que le volume de sauce pour un cône de frites est d'environ $11,78$ cm^3
3. Déterminer le nombre de bouteilles de chaque sauce que Jean devra acheter.

Toute trace de recherche même non aboutie devra apparaître sur la copie.

Rappels : Volume d'un cône de révolution : $\dfrac{\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}}{3}$
Volume d'un cylindre de révolution : $\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$
$1\,000$ cm$^3 = 1$ Litre !

Partie II. Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 page 1



La fleur de sel est la mince couche de cristaux blancs qui se forme et affleure la surface des marais salants. Chaque soir, Jean cueille la fleur de sel à la surface des carreaux. Pour transporter sa récolte, il utilise une brouette comme sur le schéma ci-dessous.
La brouette est formé par un prisme droite dont la base est un trapèze.

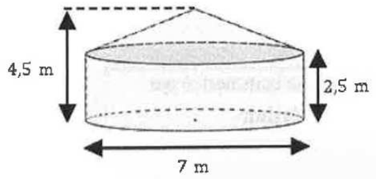
1. **Montrer que cette brouette a un volume de 77 litres.**

   - Aire du trapèze :
   $$\mathcal{A} = \frac{(40+70)\times 35}{2} = 1925\ \text{cm}^2$$
   - Volume du prisme droit :
   $$\mathcal{V} = \mathcal{A} \times 40 = 77000\ \text{cm}^3$$
   Or 1 litre =1 dm^3 =1 000 cm^3. Donc
   $$\mathcal{V} = 77\ \text{litres.}$$
   - Conclusion : La brouette a un volume de 77 litres.

2. **Sachant que 1 litre de fleur de sel pèse 900 grammes, calculer la masse en kg du contenu d'une brouette remplie de fleur de sel.**
   Sachant que 1 litre de fleur de sel pèse 900 grammes, alors 77 litres pèsent $77 \times 900 = 69\ 300g = \underline{69,3\ \text{kg}}$.

Correction de l'exercice 2 page 1

On modélise cette yourte par un cylindre et un cône.



On rappelle les formules suivantes :

Aire du disque = π × rayon²

Volume du cylindre = π × rayon² × hauteur

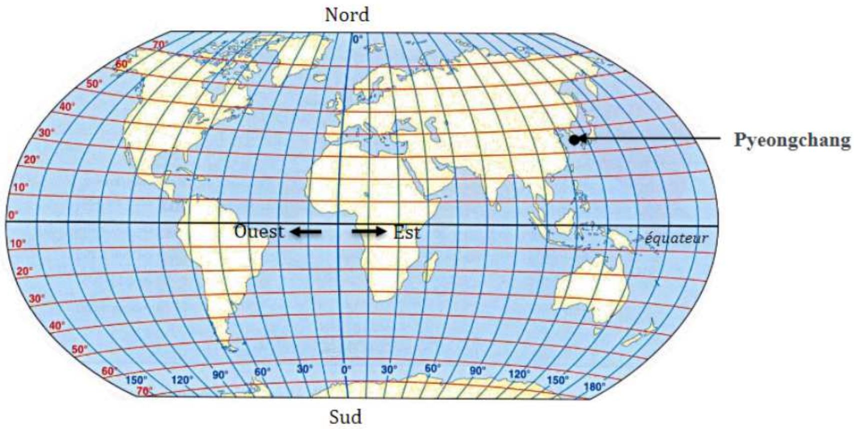
Volume du cône = $\frac{1}{3}$ × π × rayon² × hauteur

1. **Montrer que l'appartement de Samia offre une plus petite surface au sol.**
   - La surface de son appartement est de 35 m^2.
   - La base du cylindre modélisant la yourte est un disque de 7 m de diamètre donc de 3,5 m de rayon. Son aire est alors de :
   $$\mathcal{A} = \pi \times Rayon^2 = \pi \times 3,5^2 \approx \underline{38,5 \text{ m}^2 > 35 \text{ m}^2}$$
   - Conclusion : l'appartement de Samia offre une plus petite surface au sol.
2. **Calculer le volume de la yourte**.
   Le volume V de la yourte est la somme du volume du cylindre et de de celui du cône.
   $$\begin{cases} \mathcal{V}_{cone} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A} \times 2 = \dfrac{3,5^2 \times 2}{3} \times \pi = \underline{\dfrac{24,5}{3} \times \pi \text{ m}^3} \\ \mathcal{V}_{cylibdre} = \mathcal{A} \times 2,5 = \pi \times 3,5^2 \times 2,5 = \underline{30,625\,\pi \text{ m}^3} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{V \approx 121,9 \text{ m}^3}$$
3. **Samia réalise une maquette à l'échelle $\frac{1}{25}$, quelle est la hauteur de la maquette ?**
   La hauteur de la maquette est :
   $$h = 4,5 \times \frac{1}{25} = 0,18 \text{ m} = \underline{18 \text{ cm}}$$

Correction de l'exercice 3 page 2

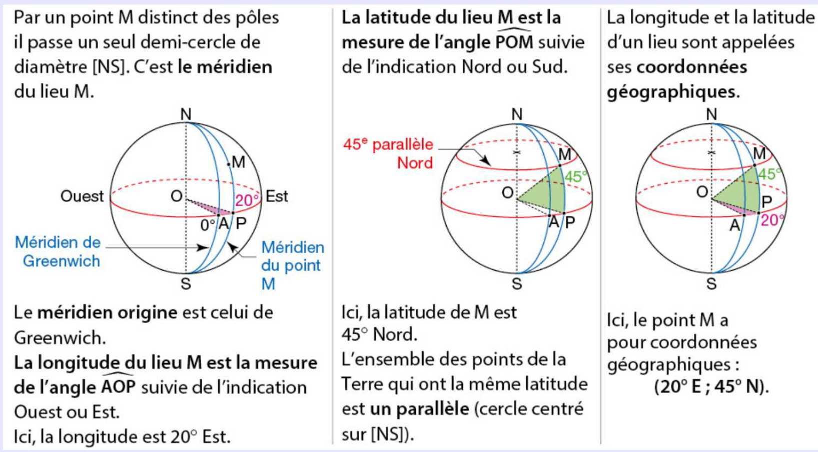
Le gros globe de cristal est un trophée attribué au vainqueur de la coupe du monde de ski. Ce trophée pèse 9 kg et mesure 46 cm de hauteur.

1. **Le biathlète français Martin Fourcade a remporté le sixième gros globe de cristal de sa carrière en 2017 à Pyeongchang en Corée du Sud. Donner approximativement la latitude et la longitude de ce lieu repéré sur la carte ci-dessous.**

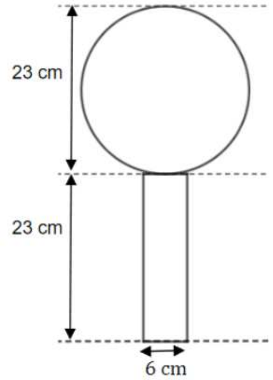


Les coordonnées sphériques de Pyeongchang sont : latitude : 35° Nord et longitude : 130 Est .

Coordonnées géographiques



2. On considère que ce globe est composé d'un cylindre en cristal de diamètre 6 cm, surmonté d'une boule de cristal. Voir schéma ci-contre. Montrer qu'une valeur approchée du volume de la boule de ce trophée est de 6 371 cm^3.



Le volume de la boule de diamètre 23 cm donc de rayon 11,5 cm est :

$$V = \frac{4}{3} \times 11,5^3 \times \pi = \underline{2\ 027,83\,\pi} \approx 6\ 370,626$$

Donc en arrondissant à l'unité :

$$V \approx \underline{6\ 371 \text{ cm}^3}$$

3. Marie affirme que le volume de la boule de cristal représente environ 90% du volume total du trophée. A-t-elle raison ?

- Le volume du cylindre de base, de rayon 3 cm et de hauteur 23 cm est :

$$V' = \pi \times 3^2 \times 23 = 207\pi \text{ cm}^3$$

- Calcul du volume total.

$$V_T = V + V' = \underline{2234,83\pi \text{ cm}^3} \approx 7020,926$$

- Calcul du pourcentage.
  On cherche alors ce que représente V par rapport au volume total V_T soit :

$$\frac{V}{V_T} = \frac{2\ 027,83\,\pi}{2234,83\pi} \approx 0,907376 \approx \underline{91\%}$$

  Le volume de la boule de cristal représente environ 90% du volume total du trophée.

Correction de l'exercice 4 page 3

Partie 1 :

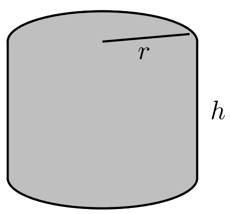
Dans cette partie, on considère que $x = 6$ m.

1. Le diamètre a une longueur de 6 m. Donc avec $r = 3$, le volume du cylindre est égal à :
$\pi \times 3^2 \times 2 = 18\pi$ m^3.

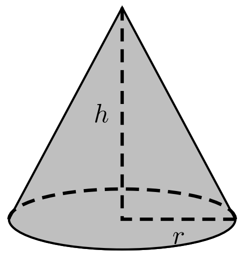
2. Le volume de la partie conique est égale à :
$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 1 = 3\pi$ m^3, soit environ $9,42$ ou 9 m^3 à l'unité près.

3. Le volume de la case est donc égal à :
$18\pi + 3\pi = 21\pi \approx 65,97$, soit environ 66 m^3 à l'unité près.

Rappels : Cylindre rayon de base r et de hauteur h — Cône rayon de base r et de hauteur h



Volume $= \pi \times r^2 \times h$



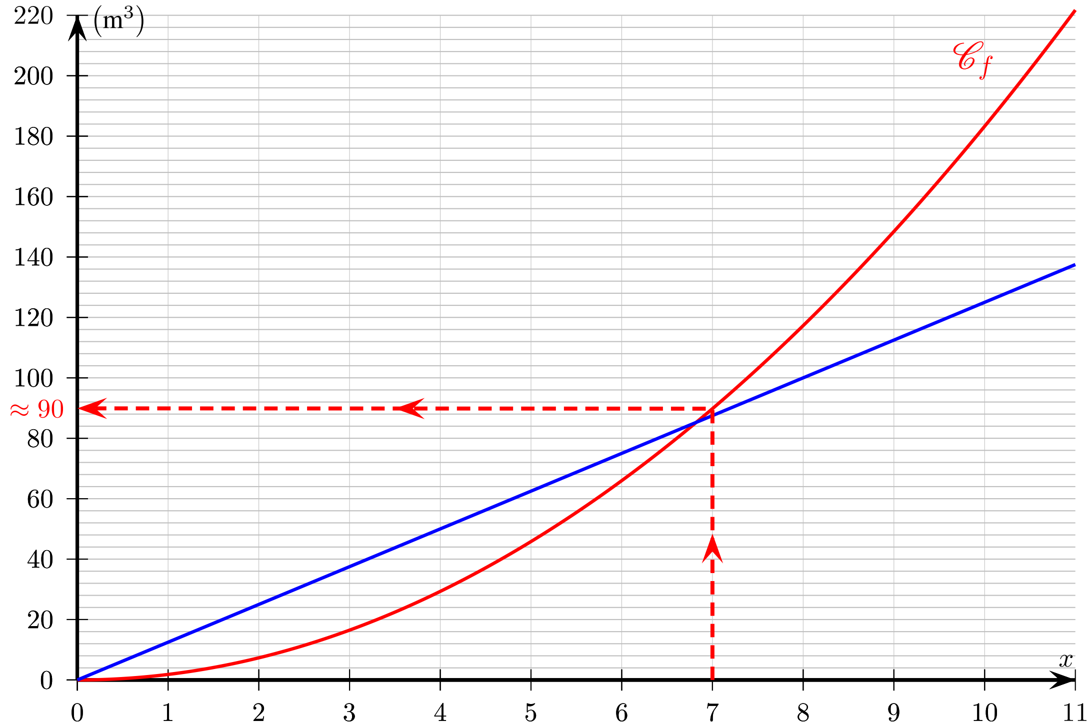
Volume $= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

Partie 2 :

Dans cette partie, le diamètre est exprimé en mètre, le volume en m^3.

On a représenté la fonction f qui donne le volume total de la case en fonction de son diamètre x.

Volume de la case en fonction de x



1. On lit sur l'annexe $V(7) \approx 90$ m^3.

$$V(x) = 12,5x.$$

2. On a $V(8) = 12,5 \times 8 = 100$ m^3.

3. La fonction V est une fonction linéaire car de la forme $x \longmapsto mx$ avec le coefficient directeur $m = 12,5$.

4. La représentation graphique de la fonction linéaire V avec x positif est une demi-droite qui passe par l'origine du repère. Deux points suffisent pour la tracer :

x	0	10
$V(x)$	0	125

Pour des raisons pratiques, la valeur maximale de x est de 6 m. Nolan souhaite choisir la construction qui lui offre le plus grand volume.

5. Quelle construction devra-t-il choisir ? Justifier.

- Ici x est compris, et graphiquement on observe que le volume maximale est atteint pour les deux fonctions pour $x = 6$.
- Le plus grand volume de la maison est donc

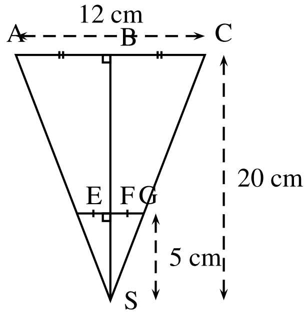
$$V(6) = 12,5 \times 6 = 75 \text{ m}^3$$

- Le plus grand volume de la case est donc

$$f(6) \approx 66 \text{ m}^3$$

Nolan choisira donc la maison.

Correction de l'exercice 5 page 5



B est le milieu de [AC] , F est le milieu de [EG] , BS = 20 cm ; FS = 5 cm ; AC = 12 cm

1. Montrer que le rayon [EF] du cône de sauce a pour mesure $1,5$ cm.

Correction

Les droite (FG) et (BC) car perpendiculaires à la même droite (SB), elles sont donc parallèles.

Les points S, F, B et S, G, C sont alignés, on peut donc d'après la propiété de Thalès :

$$\frac{\text{SF}}{\text{SB}} = \frac{\text{FG}}{\text{BC}}, \text{ soit } \frac{5}{20} = \frac{\text{FG}}{6}$$

d'où

$$\text{FG} = \frac{5}{20} \times 6 = 1,5 \text{ cm.}$$

2. Montrer que le volume de sauce pour un cône de frites est d'environ $11,78$ cm^3.

Correction

Le volume d'un cône est égal à :

$$\frac{\pi \times \text{EF}^2 \times \text{SF}}{3} = \frac{\pi \times 1,5^2 \times 5\pi}{3} = \frac{15\pi}{4} \approx 11,781$$

Soit $11{,}78$ cm^3 au centième près

3. Déterminer le nombre de bouteilles de chaque sauce que Jean devra acheter.

Correction

- Jean doit remplir 80 % des 400 cônes, de sauce tomate soit

$$400 \times \frac{80}{100} = 4 \times 80 = 320 \text{ cônes.}$$

- 320 cônes de $11{,}78$ cm^3 de sauce tomate représentent

$$320 \times 11,78 = 3\,769{,}6 \text{ cm}^3.$$

- Il a donc besoin de $\frac{3\,769{,}6}{500} \approx 7,5$ bouteilles soit 8 bouteilles de sauce tomate.
- Pour la mayonnaise il lui faut remplir 80 cônes soit $80 \times 11,78 = 942,4$ cm^3.
- Or chaque bouteille de mayonnaise a un volume de :

$$\pi \times 2,5^2 \times 15 = 93,75\pi \approx 294{,}524 \text{ cm}^3.$$

Il lui donc acheter :

$$\frac{942,4}{294,524} \approx 3,2$$

soit 4 bouteilles de mayonnaise.

- Il lui faut donc 8 bouteilles de sauce tomate et 4 bouteilles de mayonnaise.