



Math93.com

TD 2 - Troisième

Calcul littéral

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Expressions algébriques, calculs de valeurs

Exercice 1. Calculs de valeurs et tableau de valeurs (c)

On donne les expressions suivantes :

$$A(x) = -2x^2 + 3x - 1 \text{ et } B(x) = (1 - 2x)(3 - 4x)$$

Vérifier par le calcul les résultats suivants résumés dans un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	2
$A(x)$	-15	-6	-1	$\frac{1}{9}$	0	-3

x	-2	-1	0	$\frac{3}{4}$	1	2
$B(x)$	55	21	3	0	1	15

On rappelle que l'on note $A(-2)$ la valeur prise par l'expression $A(x)$ quand on remplace x par (-2) .

Expressions algébriques et développements

Exercice 2. Développements

► **Prérequis** : On rappelle que l'on note $A(-2)$ la valeur prise par l'expression $A(x)$ quand on remplace x par (-2) .

On considère les expressions suivantes :

$$\bullet C(x) = (x - 2)(1 - 3x).$$

$$\bullet D(x) = (2x + 1)^2 - 4x.$$

$$\bullet E(x) = (2x - 3)(1 - 4x) - (2 - x).$$

$$\bullet F(x) = (1 + x)(2 - 3x) + 3x^2.$$

1. Démontrer à l'aide d'un développement les égalités suivantes :

$$1. \text{ a. } C(x) = -3x^2 + 7x - 2.$$

$$1. \text{ b. } D(x) = 4x^2 + 1.$$

$$1. \text{ c. } E(x) = -8x^2 + 15x - 5.$$

$$1. \text{ d. } F(x) = 2 - x.$$

2. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? :

Affirmation 1

Pour tout nombre x , l'expression $D(x)$ est toujours strictement supérieure à 1.

3. Complément (facultatif)

Démontrer les résultats suivants, d'une part en utilisant la forme développée, d'autre part en utilisant l'expression initiale.

$$3. \text{ a. } C(-1) = -12 \text{ et } C(2) = 0.$$

$$3. \text{ b. } D\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ et } D(0) = 1.$$

$$3. \text{ c. } E(0) = -5 \text{ et } E(2) = -7.$$

$$3. \text{ d. } F(-1) = 3 \text{ et } F(0) = 2.$$

Exercice 3. Programme de calcul et multiples de 4

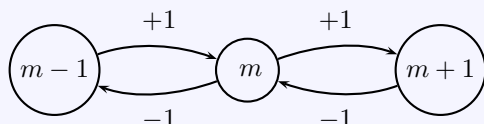
► Prérequis : développement

On rappelle les résultats suivants étudiés en cours.

Propriété 1

Soit m un entier relatif et n un entier naturel.

1. L'entier qui suit m est $(m + 1)$.
2. L'entier qui précède m est $(m - 1)$.
3. Un entier pair s'écrit sous la forme $2n$.
4. Un entier impair s'écrit sous la forme $(2n + 1)$.
5. Un entier multiple de 3 s'écrit sous la forme $3n$.
6. Un entier multiple de 4 s'écrit sous la forme $4n$.



On considère le programme suivant :

Programme 1

- Choisir un nombre premier différent de 2.
- Le multiplier par lui-même.
- Soustraire 1

1. Faire fonctionner ce programme avec trois nombres premiers de votre choix.
2. Vérifier qu'avec les nombres choisis, les résultats sont des multiples de 4.
3. **Démonstration.**
 3. a. Faire fonctionner le programme avec p un nombre premier quelconque différent de 2.
 3. b. Prouver à l'aide d'un développement que le résultat obtenu (qui est fonction de p) peut s'écrire sous la forme :

$$(p + 1)(p - 1)$$

3. c. Expliquer pourquoi les entiers $(p + 1)$ et $(p - 1)$ sont pairs.
3. d. En déduire alors que le nombre obtenu avec ce programme est toujours un multiple de 4.

Factorisation

Exercice 4. Un peu de gammes

On considère les expressions suivantes :

- $G(x) = 4x + 12.$

- $H(x) = 3x^2 + 6x.$

- $I(x) = x^2 + x.$

- $J(x) = -5x + 5.$

- $K(x) = (x + 1)(2 - x) - (x + 1).$

- $L(x) = (x + 1)(2 - x) - (x + 1)^2.$

- $L(x) = x(2 - x) - (2 - x)(2 - 3x).$

- $L(x) = (x + 1)(1 - 2x) - 2(x + 1)(2 - 3x).$

1. Démontrer à l'aide d'une factorisation les égalités suivantes :

1. a. $G(x) = 4(x + 3).$

1. b. $H(x) = 3x(x + 2).$

1. c. $I(x) = x(x + 1).$

1. d. $J(x) = 5(-x + 1).$

1. e. $K(x) = (x + 1)(1 - x).$

1. f. $L(x) = (x + 1)(1 - 2x).$

1. g. $L(x) = (2 - x)(4x - 2).$

1. h. $L(x) = (x + 1)(4x - 3).$

2. Que pensez-vous des affirmations suivantes ? :

Affirmation 2

Pour tout nombre entier naturel n , l'expression $G(n)$ est toujours un multiple de 4.

Affirmation 3

Pour tout nombre entier naturel n , l'expression $I(n)$ est toujours un nombre pair.

Affirmation 4

Pour tout nombre entier naturel n , l'expression $J(n)$ est toujours un multiple de 5.

Exercice 5. Un peu d'arithmétique

► *Prérequis : factorisation*

On cherche à savoir si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Tout d'abord, écrivez quelques exemples afin de conjecturer la réponse. Après ces exemples, si une affirmation vous semble vraie, la prouver à l'aide d'une expression algébrique, sinon exhiber un contre-exemple.

Affirmation 5

La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Affirmation 6

Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre pair.

Affirmation 7

La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Affirmation 8

La somme de deux multiples de 3 est toujours un multiple de 3.

Exercices bilan

Exercice 6. D'après Brevet 2016 : programme de calcul et affirmations (c)

On considère le programme de calcul suivant :

Programme 2

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.
- Écrire le résultat.

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer qu'on obtient 7.
2. Voici deux affirmations :

Affirmation 9

« Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7 ».

Affirmation 10

« Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui le suit ».

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.
2. b. Pour chacune de ces deux affirmations, expliquer si elle est vraie ou fausse quel que soit le nombre choisi au départ.

Exercice 7. Choisir une forme adaptée de $A(x)$ (c)

On considère l'expression

$$A(x) = (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3)$$

1. Montrer que $A(x) = -5x^2 - 9x - 4$.
2. En factorisant, montrer que $A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$.
Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.
3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Compléments (facultatif)

4. a. Résoudre en utilisant la forme factorisée l'équation :
 $A(x) = 0$.
4. b. Résoudre l'équation $A(x) = -4$.

Exercice 8. D'après Brevet : Factorisation intermédiaire (c)

On considère l'expression

$$B(x) = 5x + 10 - (x + 2)^2$$

1. Factoriser $5x + 10$.
2. En déduire une factorisation de $B(x)$.
3. Développer $B(x)$.
4. Calculer $B(-1)$, c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par -1 .

Exercice 9. D'après Brevet : avec Pythagore (c)

Soit ABC un triangle rectangle en A . On désigne par x un nombre positif et on a : $BC = x + 7$; $AB = 5$.

1. Prouver que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.
2. Si $x = 6$, déterminer les dimensions des côtés du triangle ABC , ainsi que son périmètre et son aire.

Corrections

Correction de l'exercice 1 page 1

On donne les expressions suivantes :

$$A(x) = -2x^2 + 3x - 1 \text{ et } B(x) = (1 - 2x)(3 - 4x)$$

On va montrer comment calculer quelques valeurs.

$$A(x) = -2x^2 + 3x - 1$$

- Pour $x = -2$ on a :

$$A(-2) = -2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) - 1$$

$$A(-2) = -2 \times 4 + (-6) - 1$$

$$A(-2) = -8 - 6 - 1$$

$$A(-2) = \underline{-15}$$

- Pour $x = 0$ on a :

$$A(0) = -2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 1$$

$$A(0) = -2 \times 0 + 0 - 1$$

$$A(0) = 0 + 0 - 1$$

$$A(0) = \underline{-1}$$

- Pour $x = \frac{2}{3}$ on a :

$$A\left(\frac{2}{3}\right) = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$= -2 \times \left(\frac{4}{9}\right) + 2 - 1$$

$$= -\frac{8}{9} + 1$$

$$= -\frac{8}{9} + \frac{9}{9}$$

$$A\left(\frac{2}{3}\right) = \underline{\frac{1}{9}}$$

$$B(x) = (1 - 2x)(3 - 4x)$$

- Pour $x = -2$ on a :

$$B(-2) = (1 - 2 \times (-2))(3 - 4 \times (-2))$$

$$B(-2) = (1 + 4)(3 + 8)$$

$$B(-2) = 5 \times 11$$

$$B(-2) = \underline{55}$$

- Pour $x = 0$ on a :

$$B(0) = (1 - 2 \times 0)(3 - 4 \times 0)$$

$$B(0) = (1 + 0)(3 + 0)$$

$$B(0) = 1 \times 3$$

$$B(0) = \underline{3}$$

- Pour $x = \frac{3}{4}$ on a :

$$B\left(\frac{3}{4}\right) = \left(1 - 2 \times \frac{3}{4}\right) \left(3 - 4 \times \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{3}{2}\right) (3 - 3)$$

$$= \left(1 - \frac{3}{2}\right) \times 0$$

$$B\left(\frac{3}{4}\right) = \underline{0}$$

Correction de l'exercice 2 page 1

1. Dans la première question, il suffit de développer l'expression initiale. On a par exemple :

$$C(x) = (x - 2)(1 - 3x)$$

$$C(x) = x - 3x^2 - 2 + 6x$$

$$C(x) = \underline{-3x^2 + 7x - 2}$$

$$D(x) = (2x + 1)^2 - 4x$$

$$D(x) = (2x + 1)(2x + 1) - 4x$$

$$D(x) = 4x^2 + 2x + 2x + 1 - 4x$$

$$D(x) = \underline{4x^2 + 1}$$

2. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? :

Affirmation 11

Pour tout nombre x , l'expression $D(x)$ est toujours strictement supérieure à 1.

On a montré dans la question précédente que :

$$D(x) = 4x^2 + 1$$

• **Méthode 1 : avec un contre-exemple.**

Pour $x = 0$ on a :

$$D(0) = 4 \times 0^2 + 1 = 1$$

Donc l'affirmation est fausse puisque l'expression $D(x)$ est égale à 1 pour $x = 0$, elle n'est donc pas toujours strictement supérieure à 1.

• **Méthode 2 : une jolie preuve.**

Pour tout nombre réel x , le carré x^2 est positif ou nul, ce que l'on peut écrire en langage mathématiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

De ce fait en multipliant cette inégalité par 4, on conclut que $4x^2$ est aussi positif ou nul, ce que l'on peut écrire en langage mathématiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4 \times x^2 \geq 0$$

Et si on ajoute 1, l'expression $(4x^2 + 1)$ est donc toujours supérieure ou égale à 1, ce que l'on peut écrire en langage mathématiques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 1 \geq 1$$

De ce fait, $D(x) = 4x^2 + 1$ est toujours supérieure ou égale à 1, mais pas strictement supérieur à 1.

Correction de l'exercice 3 page 2

C'est le DM, attendons un peu pour avoir le corrigé.

Correction de l'exercice 6 page 4

Voici un programme de calcul :

Étape 1	Choisir un nombre entier positif
Étape 2	Ajouter 1
Étape 3	Calculer le carré du résultat
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ

1. On applique ce programme de calcul au nombre 3. Montrer que le résultat obtenu est 7.



Corrigé

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	3
Étape 2	Ajouter 1	$3 + 1 = 4$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$4^2 = 16$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$16 - 3^2 = 16 - 9 = \underline{7}$

Le résultat obtenu avec 3 au départ est bien 7.

2. Voici deux affirmations :

Affirmation 12

Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7.

Affirmation 13

Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit.

2. a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

**Corrigé**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	8	13
Étape 2	Ajouter 1	$8 + 1 = 9$	$13 + 1 = 14$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$81 - 8^2 = \underline{17}$	$196 - 13^2 = \underline{27}$

- Donc avec 8 on obtient 17,
17 est un nombre dont le chiffre des unités est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :

$$17 = 8 + 9$$

Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

- Donc avec 13 on obtient 27,
27 est un nombre dont le chiffre des unités est 7 donc l'affirmation 1 est vraie.
En outre on a :

$$27 = 13 + 14$$

Le résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui suit. L'affirmation 2 est vraie.

2. b. Pour chacune des affirmations, expliquez si elle est vraie ou fausse quelque soit le nombre choisi au départ.

**Corrigé**

- **Pour l'affirmation 1.**

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	1
Étape 2	Ajouter 1	$1 + 1 = 2$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$2^2 = 4$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$4 - 1^2 = 3$

En prenant 1 au départ on obtient 3 dont le chiffre des unités n'est pas 7, l'affirmation 1 n'est donc pas toujours vraie.

- **Pour l'affirmation 2.**

On va partir d'un nombre quelconque, entier positif que l'on peut noter n .

Étape 1	Choisir un nombre entier positif	n
Étape 2	Ajouter 1	$n + 1$
Étape 3	Calculer le carré du résultat	$(n + 1)^2$
Étape 4	Enlever le carré du nombre de départ	$(n + 1)^2 - n^2$

On obtient donc la différence de deux carrés $(n + 1)^2 - n^2$, terme que l'on peut développer :

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Or $2n + 1$ pour s'écrire sous la forme d'une somme de l'entier n et de son suivant $n + 1$:

$$2n + 1 = n + (n + 1)$$

L'affirmation 2 est donc toujours vraie.

Correction de l'exercice 7 page 4

On considère l'expression

$$A(x) = (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3)$$

1. Montrer que $A(x) = -5x^2 - 9x - 4$.



Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2 \times (2x^2 + 3x + 2x + 3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = -5x^2 - 9x - 4}$$

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= \boxed{(x + 1) \times (2 - x)} - \boxed{2 \times (x + 1) \times (2x + 3)} \\ &= \underline{(x + 1)} \times [(2 - x) - 2(2x + 3)] \\ &= \underline{(x + 1)} \times [2 - x - 4x - 6] \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = (x + 1)(-5x - 4)}$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.



Corrigé

Par exemple en utilisant la forme factorisée :

$$A(2) = (2 + 1)(-5 \times 2 - 4) = 3 \times (-14) = \underline{-42}$$

4. [Difficile] Trouver une valeur de x qui donne 0 dans l'expression $A(x)$. C'est à dire trouver au moins une solution de l'équation $A(x) = 0$.

**Corrigé**

La forme factorisée est :

$$A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$$

Pour que ce produit soit nul, il faut nécessairement que l'un au moins des facteurs soit nul, on le verra en 3e.

Donc par exemple dès que $(x + 1)$ est nul, ce produit le sera aussi.

Il suffit de prendre $x = -1$.

Mais si $(-5x - 4)$ est nul, le produit est aussi nul, on peut donc aussi choisir $x = -\frac{4}{5}$

Correction de l'exercice 8 page 4 : Avec une factorisation intermédiaire

On considère l'expression : $B(x) = 5x + 10 - (x + 2)^2$.

1. Factoriser $5x + 10$.

**Corrigé**

$$5x + 10 = 5(x + 2)$$

2. En déduire une factorisation de $B(x)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} B(x) &= \boxed{(x + 2) \times 5} - \boxed{(x + 2) \times (x + 2)} \\ &= \underline{(x + 2)} \times [5 - (x + 2)] \\ &= \underline{(x + 2)} \times [5 - x - 2] \\ &= \boxed{B(x) = (x + 2)(-x + 3)} \end{aligned}$$

3. Développer $B(x)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} B(x) &= 5x + 10 - (x + 2)^2 \\ &= 5x + 10 - (x + 2)(x + 2) \\ &= 5x + 10 - (x^2 + 2x + 2x + 4) \\ &= 5x + 10 - x^2 - 2x - 2x - 4 \\ &= \boxed{B(x) = -x^2 + x + 6} \end{aligned}$$

4. Calculer $B(-1)$,
c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par -1 .

**Corrigé**

En utilisant par exemple la forme initiale $B(x) = 5x + 10 - (x + 2)^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} B(-1) &= 5 \times (-1) + 10 - (-1 + 2)^2 \\ &= -5 + 10 - (1)^2 \\ &= -5 + 10 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{B(-1) = 4}$$

Exercice 10. Correction de l'exercice 9 page 4 : avec Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A . On désigne par x un nombre positif et on a : $BC = x + 7$; $AB = 5$.

1. Prouver que : $AC^2 = x^2 + 14x + 24$.

**Corrigé**

Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \iff (x + 7)^2 = 5^2 + AC^2$$

Et donc

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x + 7)^2 - 25 \\ &= x^2 + 14x + 49 - 25 \end{aligned}$$

$$\boxed{AC^2 = x^2 + 14x + 24}$$

2. Si $x = 6$, déterminer les dimensions des côtés du triangle ABC , ainsi que son périmètre et son aire.

**Corrigé**

- Si $x = 6$ alors :

$$AC^2 = x^2 + 14x + 24 = 6^2 + 14 \times 6 + 24 = 144$$

Et puisque AC est positif, on a : $\boxed{AC = 12}$

- On a aussi :

$$BC = 6 + 7 = 13 \quad \text{et} \quad AB = 5$$

- Le périmètre est alors :

$$P = 12 + 13 + 5 = \underline{30}$$

- L'aire est alors :

$$AB \times AC = 5 \times 12 = \underline{60}$$