



Math93.com

TD 4 - Troisième

Compléments : Calcul littéral

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie

Identités remarquables

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad \boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exercice 1. Identités remarquables (c)

Compléter les égalités suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $(x - \dots)^2 = \dots - 2x + \dots$ 2. $(x - \dots)^2 = \dots - 4x + \dots$ 3. $(x - \dots)^2 = \dots - 8x + \dots$ 4. $(2x + \dots)^2 = \dots + 4x + \dots$ 5. $(3x + \dots)^2 = \dots + 12x + \dots$ | <ol style="list-style-type: none"> 6. $(x - \dots)^2 = \dots - 10x + \dots$ 7. $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 4$ 8. $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 49$ 9. $(\dots - 3)(\dots + 3) = 4x^2 - \dots$ |
|---|---|

Exercice 2. Développer des identités remarquables(c)

Développer les expressions suivantes directement :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $(x - 1)^2 = \dots$ 2. $(x + 7)^2 = \dots$ 3. $(x + 5)(x - 5) = \dots$ 4. $(1 - 3x)^2 = \dots$ 5. $(2x - 3)(2x + 3) = \dots$ | <ol style="list-style-type: none"> 6. $(3x - 2)^2 = \dots$ 7. $(8 - x)(x + 8) = \dots$ 8. $(-1 + x)^2 = \dots$ 9. $(-2 + 5x)^2 = \dots$ |
|--|---|

Exercice 3. Factoriser des identités remarquables (c)

Factoriser les expressions suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x^2 - 2x + 1 = \dots$ 2. $x^2 + 12x + 36 = \dots$ 3. $x^2 - 16 = \dots$ 4. $4x^2 - 1 = \dots$ 5. $25x^2 + 20x + 4 = \dots$ | <ol style="list-style-type: none"> 6. $x^2 - 1 = \dots$ 7. $x^2 - 6x + 9 = \dots$ 8. $1 - 8x + 16x^2 = \dots$ 9. $9 - 100x^2 = \dots$ |
|---|---|

Deuxième partie

Quelques techniques algébriques

Exercice 4. Factorisations

Montrer avec une factorisation les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x - 3)(1 - 4x) - (2x - 3)^2 = \underline{(2x - 3)(-6x + 4)}$$

2. Montrer que :

$$(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 = \underline{(x - 4)(3x - 2)}$$

3. Montrer que :

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = \underline{4x}$$

Exercice 5. Développements délicats

Montrer par un développement les égalités suivantes :

1. Montrer que :

$$(2x - 3)^2 - 3(x + 1)(2 - 5x) = \underline{19x^2 - 3x + 3}$$

2. Montrer que :

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3(x + 1)\left(2 - \frac{x}{3}\right) = \underline{5x^2 - 9x - 5}$$

3. Montrer que :

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \underline{8x^2 - 6x + \frac{5}{4}}$$

Exercice 6. [Niveau seconde **] Astuces et fourberies! (c)



Astuces

- Ne pas confondre

$$(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2 \quad \text{et} \quad 3x^2 = 3 \times x \times x = 3 \times (x^2)$$

- Ne pas confondre

$$(-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2 \quad \text{et} \quad -x^2 = -(x \times x) = -(x^2)$$

- On a par ailleurs :

$$\checkmark \quad (-a - b)^2 = (a + b)^2$$

$$\text{car } (-a - b)^2 = (-1 \times (a + b))^2 = (-1)^2 \times (a + b)^2 = (a + b)^2.$$

$$\checkmark \quad (-a + b)^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$$

$$\text{car } (-a + b)^2 = (-1 \times (a - b))^2 = (-1)^2 \times (a - b)^2 = (a - b)^2.$$



Exemple

- $(-3x + 1)^2 = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- $(-3x - 1)^2 = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4x)^2 = (4x)^2 = 16x^2 \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 = -(x)^2 = -(x^2) \leq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \geq 0$

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x - 3)^2$

1. b. $A_2(x) = x - (-2x + 5)^2$

1. c. $A_3(x) = (-x - 1)^2 - (-x + 2)^2$

1. d. $A_4(x) = -(-x + 1)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x + 4)^2 - (x + 2)(x + 3)$

2. b. $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x + 2)(x + 3)$

2. c. $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x + 3)(x + 1)$

2. d. $B_4(x) = x^2 + 2x - 3$

Astuce : $x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4$

Troisième partie

Choisir une forme adaptée

Exercice 7. Choisir une forme adaptée de $B(x)$

On considère l'expression

$$B(x) = (2x + 1)^2 - (1 - x)^2$$

1. Montrer que :

$$B(x) = 3x^2 + 6x$$

2. En factorisant, montrer que :

$$B(x) = 3x(x + 2)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $B(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $B(2)$, c'est à dire $B(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Calculer $B(-1)$ et $B\left(-\frac{2}{3}\right)$.



Réponses

$$B(2) = 24, B(-1) = -3 \text{ et } B\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

Exercice 8. Choisir une forme adaptée de $A(x)$ (c)

On considère l'expression

$$A(x) = (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3)$$

1. Montrer que :

$$A(x) = -5x^2 - 9x - 4$$

2. En factorisant, montrer que :

$$A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.

4. Calculer $A(-1)$ et $A\left(-\frac{2}{3}\right)$.



Réponses

$$A(2) = -42, A(-1) = 0 \text{ et } A\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

Exercice 9. Choisir une forme adaptée (c)

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer en développant que : $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.
2. Montrer à l'aide d'une factorisation que : $f(x) = (1 - 2x)(x - 2)$.
3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$.

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.
2. Montrer que $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 6$.
3. [Seconde **] Déterminer le maximum de la fonction f sur \mathbb{R} et le réel pour lequel il est atteint.

Exercice 10. Choisir une forme adaptée (c)

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2)(3 - 5x) - (6x - 4)(-x - 2)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. Montrer que : $f(x) = x^2 + x - 2$.
2. Montrer que : $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f(0)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$.
2. Montrer que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
3. [Seconde **] Déterminer le minimum de la fonction f sur \mathbb{R} et le réel pour lequel il est atteint.

Quatrième partie

Correction

Correction de l'exercice 1 page1



Réponses

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1, (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4, (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16, (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1, (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25, (x-2)(x+2) = x^2 - 4, (x-7)(x+7) = x^2 - 49, (2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9.$$

Correction de l'exercice 2 page1



Réponses

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49, (x+5)(x+5) = x^2 - 25, (1-3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

$$(2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9, (3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4, (8-x)(x+8) = 64 - x^2, (-1+x)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$(-2+5x)^2 = 25x^2 - 20x + 4.$$

Correction de l'exercice 3 page1



Réponses

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, (x+6)^2 = x^2 + 12x + 36, (x-4)(x+4) = x^2 - 16, (2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$$

$$(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4, (x-1)(x+1) = x^2 - 1, (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9, (1-4x)^2 = 1 - 8x + 16x^2,$$

$$(3-10x)(3+10x) = 9 - 100x^2.$$

Correction de l'exercice 6 page3 : astuces et fourberies

1. Développer les expressions suivantes :

1. a. $A_1(x) = (-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

1. b. $A_2(x) = x - (-2x+5)^2 = x - (2x-5)^2 = -4x^2 + 21x - 25$

1. c. $A_3(x) = (-x-1)^2 - (-x+2)^2 = 6x - 3$

1. d. $A_4(x) = -(-x+1)^2 = -(x-1)^2 = -x^2 + 2x - 1$

2. Factoriser les expressions suivantes :

2. a. $B_1(x) = (2x+4)^2 - (x+2)(x+3) = (x+2)(3x+5)$

2. b. $B_2(x) = x^2 + 2x + 1 - (2x+2)(x+3) = (x+1)(-x-5)$

2. c. $B_3(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (6x+3)(x+1) = (-x-2)(2x+1)$

2. d. $B_4(x) = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x+1)^2 - 2^2 = (x+3)(x-1)$

Correction de l'exercice 8 page 4

On considère l'expression

$$A(x) = (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3)$$

1. Montrer que $A(x) = -5x^2 - 9x - 4$.



Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 1)(2 - x) - 2(x + 1)(2x + 3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2 \times (2x^2 + 3x + 2x + 3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = -5x^2 - 9x - 4}$$

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} A(x) &= \boxed{(x + 1) \times (2 - x)} - \boxed{2 \times (x + 1) \times (2x + 3)} \\ &= \underline{(x + 1)} \times [(2 - x) - 2(2x + 3)] \\ &= \underline{(x + 1)} \times [2 - x - 4x - 6] \end{aligned}$$

$$\boxed{A(x) = (x + 1)(-5x - 4)}$$

Pour la suite, vous pourrez utiliser la forme de $A(x)$ la plus adaptée.

3. Calculer $A(2)$, c'est à dire $A(x)$ en remplaçant x par 2.



Corrigé

Par exemple en utilisant la forme factorisée :

$$A(2) = (2 + 1)(-5 \times 2 - 4) = 3 \times (-14) = \underline{\underline{-42}}$$

4. [Difficile] Trouver une valeur de x qui donne 0 dans l'expression $A(x)$. C'est à dire trouver au moins une solution de l'équation $A(x) = 0$.



Corrigé

La forme factorisée est :

$$A(x) = (x + 1)(-5x - 4)$$

Pour que ce produit soit nul, il faut nécessairement que l'un au moins des facteurs soit nul, on le verra en 3e.

Donc par exemple dès que $(x + 1)$ est nul, ce produit le sera aussi.

Il suffit de prendre $x = -1$.

Mais si $(-5x - 4)$ est nul, le produit est aussi nul, on peut donc aussi choisir $x = -\frac{4}{5}$

Correction de l'exercice 9 page 5

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x)$.

Partie A : Écrire et transformer (3 points)

1. Montrer en développant que : $f(x) = \underline{-2x^2 + 5x - 2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - (3 - 3x - 6x + 6x^2) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 \\ f(x) &= \underline{-2x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que : $f(x) = \underline{(1 - 2x)(x - 2)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1 + 2x)^2 - (3 - 6x)(1 - x) \\ &= (1 - 2x)^2 - 3(1 - 2x)(1 - x) \\ &= (1 - 2x)[(1 - 2x) - 3(1 - x)] \\ &= (1 - 2x)[1 - 2x - 3 + 3x] \\ f(x) &= \underline{(1 - 2x)(-2 + x)} \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \underline{-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - \frac{25}{8} + \frac{9}{8} \\ &= -2x^2 + 5x - 2 \\ &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes (11 points)

1. [1 point] Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.

En utilisant la forme factorisée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(1 - 2 \times \frac{1}{2}\right)}_0 \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

En utilisant la forme (3.)

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -2 \underbrace{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right)^2}_0 + \frac{9}{8}$$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}$

2. [1 point] Montrer que $f(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} - 6$.

En utilisant la forme développée :

$$f(\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 + 5(\sqrt{2}) - 2 = -4 + 5(\sqrt{2}) - 2 = \underline{5\sqrt{2} - 6}$$

3. [3 points] Déterminer le maximum de la fonction f sur \mathbb{R} et le réel pour lequel il est atteint.

D'après la question A3 on a que pour tout réel x :

$$f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

Pour tout réel x , l'expression $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$ est positive ou nul donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$$

En multipliant par $(-2) < 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -2 \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \leq 0$$

Et donc en ajoutant $\frac{9}{8}$ de chaque côté :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \underbrace{-2 \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}_{f(x)} \leq \frac{9}{8}$$

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq \frac{9}{8}$$

Le nombre $\frac{9}{8}$ est donc un majorant de f sur \mathbb{R} , or d'après la question B1, il est atteint pour $x = \frac{5}{4}$, c'est donc le maximum de f sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 10 page 5

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2)(3 - 5x) - (-4 + 6x)(-x - 2)$$

Partie A : Écrire et transformer

1. [1 point] Développement : $f(x) = x^2 + x - 2$.

2. [1 point] Factorisation : $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.

3. [1 point] Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} \\ &= x^2 + x - \frac{8}{4} \\ &= x^2 + x - 2 \\ &= f(x) \text{ d'après la forme développée de la question 1a) } \end{aligned}$$

Et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} , f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. [2 points] Calculs de valeurs.

• [0,5 point] Pour calculer $f(0)$ utilisons la forme développée de la question 1a) : $f(0) = -2$;

• [1 point] Pour calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ utilisons la forme de la question 1c) :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 - \frac{9}{4}$$

donc

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

- [0,5 point] Pour calculer $f(1)$ utilisons la forme factorisée de la question 1b) : $f(1) = 0$.

2. [1 point] Montrer que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}) - 2 = \sqrt{2}$$

3. [2 points] Déterminons le minimum de la fonction f sur \mathbb{R} et le réel pour lequel il est atteint.

On va utiliser la forme de la question 1c) pour cela.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq 0 - \frac{9}{4}$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{9}{4}$$

En outre d'après la question 2a), ce minorant est atteint pour $x = -\frac{1}{2}$ car $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, c'est donc le minimum de f .

$$\text{Le minimum de } f \text{ est } -\frac{9}{4}, \text{ il est atteint pour } x = -\frac{1}{2}$$