



Math93.com

TD 2 - Troisième

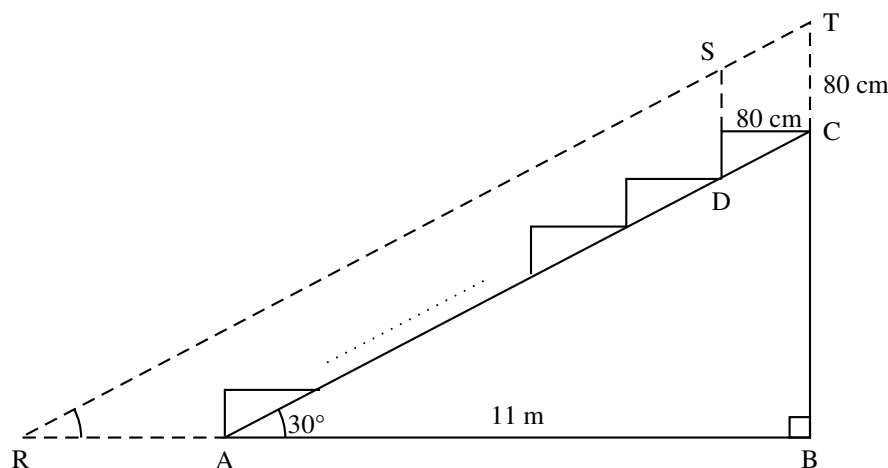
La trigonométrie au Brevet et compléments

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres proposent juste des éléments de réponses et une correction détaillée sur le site www.math93.com

Partie I. La trigonométrie au Brevet

Exercice 1. Polynésie, Septembre 2017 (c)

La figure ci-dessous représente le plan de coupe d'une tribune d'un gymnase. Pour voir le déroulement du jeu, un spectateur du dernier rang assis en C doit regarder au-dessus du spectateur placé devant lui et assis en D. Une partie du terrain devant la tribune lui est alors masquée. On considérera que la hauteur moyenne d'un spectateur assis est de 80 cm ($CT = DS = 80$ cm).



Sur ce plan de coupe de la tribune :

- les points R, A et B sont alignés horizontalement et les points B, C et T sont alignés verticalement ;
- les points R, S et T sont alignés parallèlement à l'inclinaison (AC) de la tribune ;
- on considérera que la zone représentée par le segment [RA] n'est pas visible par le spectateur du dernier rang ;
- la largeur au sol AB de la tribune est de 11 m et l'angle \widehat{BAC} d'inclinaison de la tribune mesure 30° .

1. Montrer que la hauteur BC de la tribune mesure 6,35 m, arrondie au centième de mètre près.
2. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BRT} ?
3. Calculer la longueur RA en centimètres. Arrondir le résultat au centimètre près.



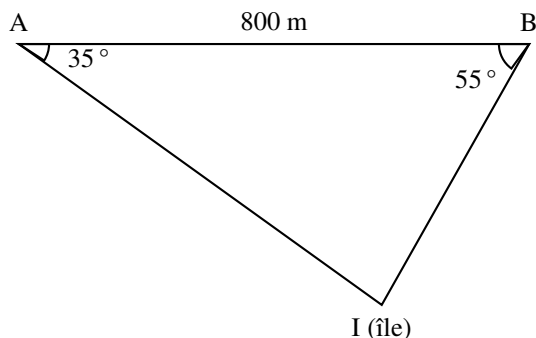
Réponses

§ (2.) 30° ; (3.) $AR \approx 1,38$ m.

Exercice 2. Brevet des collèges Amérique du Sud, novembre 2012. (c)

Deux bateaux sont au large d'une île et souhaitent la rejoindre pour y passer la nuit. On peut schématiser leurs positions A et B comme indiquées ci-contre. Ils constatent qu'ils sont séparés de 800 m, et chacun voit l'île sous un angle différent.

Déterminer, au m près, la distance qui sépare chaque bateau de l'île.

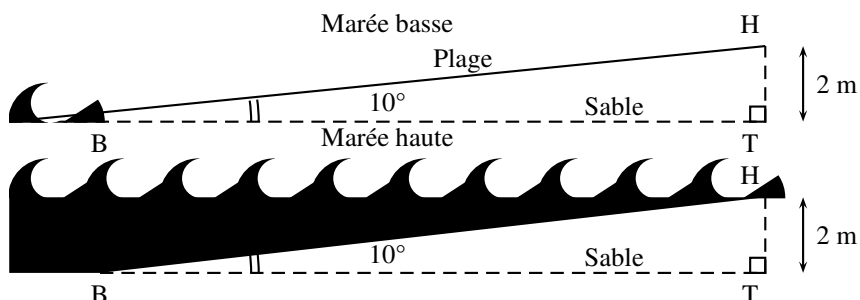


Solution.
 $AI \simeq 655 \text{ m}$ et $BI \simeq 459 \text{ m}$

Exercice 3. Brevet des collèges Nouvelle-Calédonie, 11 décembre 2012 (c)

Le niveau de la mer monte et descend suivant le cycle des marées. Les deux schémas ci-dessous représentent la même plage parfaitement lisse, à deux instants de la journée.

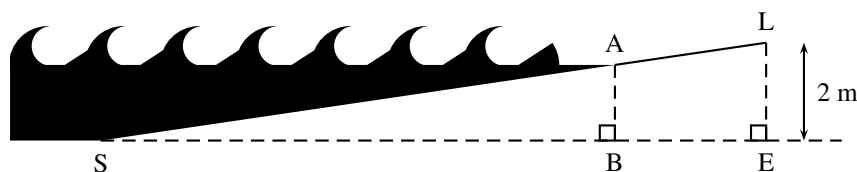
On a : $HT = 2 \text{ m}$, $HBT = 10^\circ$ et $(HT) \perp (BT)$.



1. Calculer la longueur BH, en mètres, de plage recouverte par la mer à marée haute. Donner l'arrondi au dixième près.
2. Sur une autre plage de pente différente (mais toujours parfaitement lisse), la mer a recouvert la plage jusqu'au point L. Deux heures plus tard, la mer s'est retirée et se situe désormais au point A.

Sur le schéma, les points S, B et E sont alignés. Ils correspondent au niveau horizontal.

On a : $SL = 9 \text{ m}$; $AL = 2,25 \text{ m}$; $(AB) \perp (SE)$; $(LE) \perp (SE)$.



Démontrer que les droites (AB) et (LE) sont parallèles.

Calculer la longueur AB, en mètres, du niveau vertical actuel de la mer.

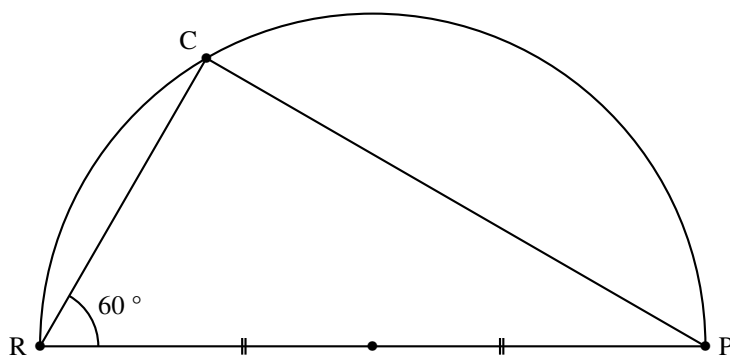
Solution.

$BH \simeq 5,8 \text{ m}$ (au dixième près)

Exercice 4. A vos pelles ! Brevet Nouvelle-Calédonie, 6 décembre 2011 (c)

Voici une carte découverte par Ruffy qui lui permettra de déterrer le fabuleux trésor de Math le Pirate. On note :

- R le roche en forme de crâne, C le cocotier sous lequel est enterré le trésor
- P le phare et C est sur le demi-cercle de diamètre [PR]



La distance du phare au rocher en forme de crâne est de 3 000 brasses.

Aidez-le à mettre la main sur le butin :

1. Démontrer que le triangle PRC est un triangle rectangle.
2. Calculer la distance RC en brasses.

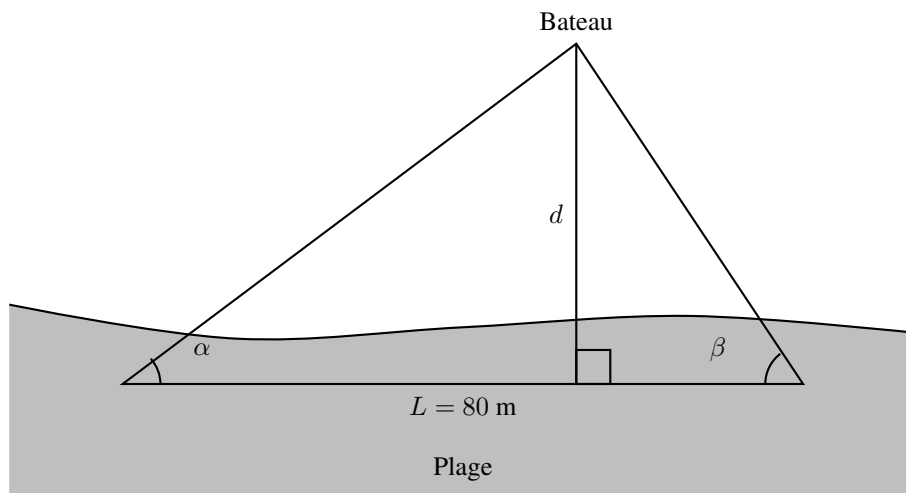
À vos pelles !!!

Solution.

2°) $RC = 1\,500$ brasses.

Exercice 5. Le bateau : Brevet Asie 22 Juin 2015 (c)

Un bateau se trouve à une distance d de la plage.



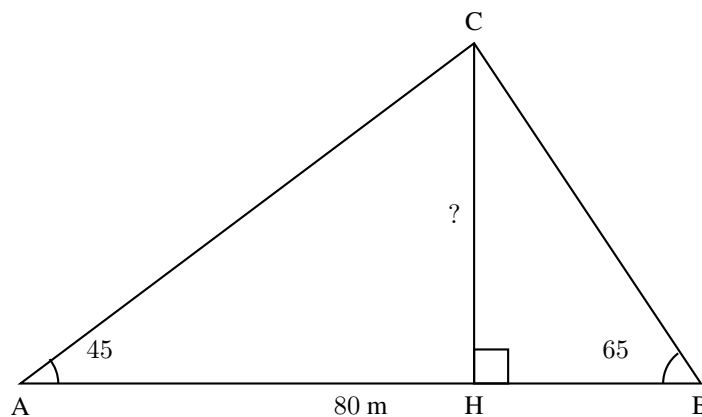
Supposons dans tout le problème que $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 65^\circ$ et que $L = 80$ m.

1. Conjeturons la distance d à l'aide d'une construction

Mise au point par Thalès (600 avant JC), la méthode dite de TRIANGULATION propose une solution pour estimer la distance d .

- 1. a. Faire un schéma à l'échelle 1/1 000 (1 cm pour 10 m).
- 1. b. Conjecturer en mesurant sur le schéma la distance d séparant le bateau de la côte.

2. Déterminons la distance d par le calcul



- 2. a. Expliquer pourquoi la mesure de l'angle \widehat{ACB} est de 70° .
- 2. b. Dans tout triangle ABC, on a la relation suivante appelée « loi des sinus » :

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}$$

En utilisant cette formule, calculer la longueur BC. Arrondir au cm près.

- 2. c. En déduire la longueur CH arrondie au cm près.

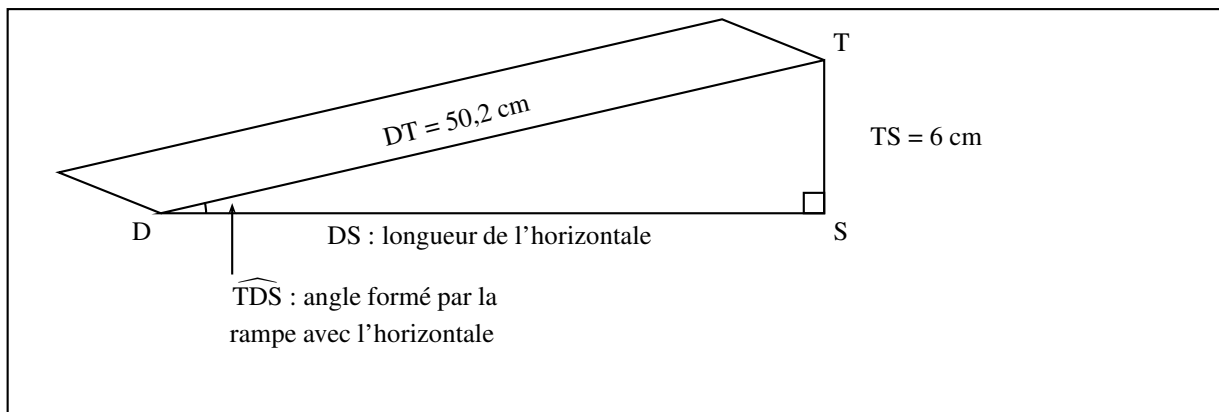
Réponses

Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 6. Une rampe - Brevet des collèges Métropole, septembre 2015 (c)

Une boulangerie veut installer une rampe d'accès pour des personnes à mobilité réduite.
Le seuil de la porte est situé à 6 cm du sol.

- Document 1 : Schéma représentant la rampe d'accès



- Document 2 : Extrait de la norme relative aux rampes d'accès pour des personnes à mobilité réduite

La norme impose que la rampe d'accès forme un angle inférieur à 3° avec l'horizontale sauf dans certains cas.
Cas particuliers :

L'angle formé par la rampe avec l'horizontale peut aller :

- jusqu'à 5° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 2 m.
- jusqu'à 7° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 0,5 m.

Cette rampe est-elle conforme à la norme ?

Exercice 7. La cathédrale - Brevet des collèges Nouvelle-Calédonie, décembre 2010 (c)

La construction de la cathédrale de Mata Utu à Wallis (Wallis-et-Futuna ou les îles Wallis et Futuna est une collectivité d'outre-mer française située dans l'hémisphère sud), date de 1951 et s'est faite sans suivre de plan. Tout s'est fait avec les qualités visuelles et manuelles des ouvriers.

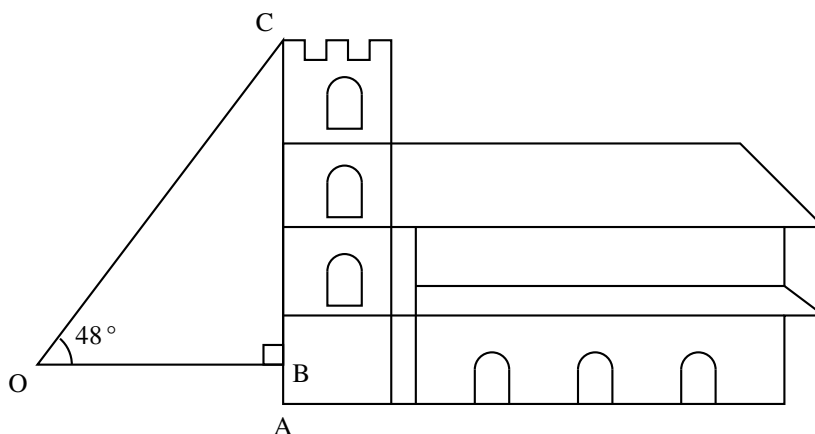
C'est pourquoi aucune donnée « numérique » ne reste de cette construction (hauteur, longueur, ...).

Un jour, le jeune Paulo a voulu calculer la hauteur de la cathédrale. Il fait alors une figure la représentant vue de côté (voir ci-dessous) en nommant les points O, A, B et C qui vont lui permettre de faire le calcul.

Grâce à un instrument de mesure placé en O à 1,80 m du sol, il mesure l'angle \widehat{COB} qui fait 48° .

Ensuite, il trouve $OB = 15\text{m}$ (on suppose que les murs de la cathédrale sont bien perpendiculaires au sol).

Calculer alors la hauteur CA de la cathédrale (arrondie au dixième de mètre).



Solution.

$CA \simeq 18,5 \text{ m (à } 0,1 \text{ m près)}$

Exercice 8. Brevet des collèges, septembre 2008 (c)

On considère un cercle de centre O et de diamètre [BC] tel que $BC = 8$ cm.
On place sur ce cercle un point A tel que $BA = 4$ cm.

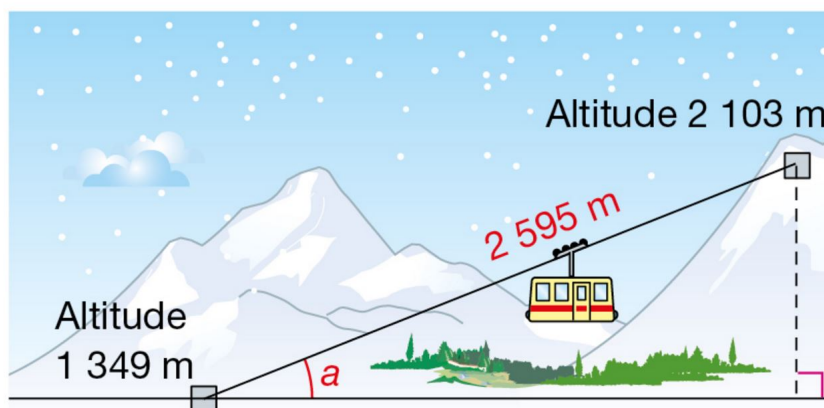
1. Faire une figure en vraie grandeur.
2.
 2. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
 2. b. Calculer la valeur exacte de la longueur AC. Donner la valeur arrondie de AC au millimètre près,
 2. c. Déterminer la mesure de l'angle \widehat{ABC} .
3. On construit le point E symétrique du point B par rapport au point A. Quelle est la nature du triangle BEC ? Justifier.

Solutions.

$$2b) AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,9 \text{ cm}$$

$$2c) \widehat{ABC} = 60^\circ$$

Exercice 9. A cable car



Donner une valeur approchée au degré près de l'angle formé par le câble et l'horizontal.

Exercice 10. KWYK

Effectuer le TD bilan Kwyk et si vous obtenez plus de 17/20, passez à la section suivante.

Sinon, il est conseillé de refaire les exercices du TD 1 et les exercices corrigés page 523 de votre manuel.

Partie II. Compléments et prolongements ... là, on peut discuter !

Exercice 11. La formule d'Al-kashi (*) : Brevet des collèges Polynésie, septembre 2010 (c)



Remarque historique

Al-Kachi ou Al-Kashi (« le natif de Kashan »), est mathématicien et astronome perse (vers 1380, Kashan (Iran) - 1429, Samarcande (Ouzbékistan)). Ce mathématicien est surtout célèbre pour avoir calculé le nombre π avec une précision de seize décimales, précision qui ne fut pas dépassée pendant près de deux siècles. La formule dite d'Al-Kashi n'est appelée ainsi qu'en France, elle est nommée *loi des cosinus* dans le reste du monde, ou encore *théorème de Pythagore généralisé*. Pour en savoir plus : <http://math93.com>

La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et un angle. Pour un triangle ABC, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$$

On considère pour tout l'exercice que : $AB = 6$ cm, $AC = 12$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

1. Construire un triangle ABC vérifiant les conditions précédentes.
2. Donner la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$.

En déduire avec la formule d'Al-Kashi que l'on a :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - AC \times AB$$

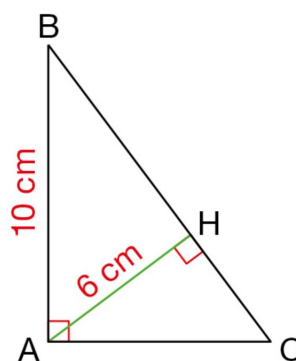
Montrer que $BC = \sqrt{108}$ cm.

3. En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 12. Bien choisir son triangle (c)

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A.

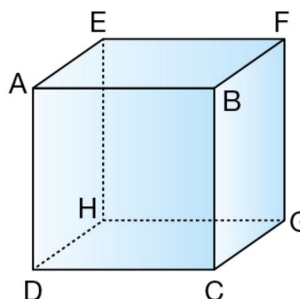
- a. Calculer $\sin \widehat{ABC}$.
- b. En déduire une valeur approchée au dixième près de la longueur BC, en cm.



Exercice 13. Dans l'espace (c)

ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et AG, puis une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle \widehat{CAG} .



Exercice 14. PPF* - Brevet des collèges, 2008 (c)

L'unité de longueur est le centimètre.

1. Construire un triangle DOS tel que $DS = DO = 6$ et $\widehat{ODS} = 120^\circ$.

Quelle est la nature du triangle DOS ? Justifier.

2. Dans le triangle DOS, tracer la hauteur issue de D. Elle coupe [OS] en H.

On donne le tableau suivant :

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2. a. Calculer la valeur exacte de OH.

2. b. En déduire que $OS = 6\sqrt{3}$.

3. Placer le point M de [DS] tel que $SM = 5$. Tracer la parallèle à (OS) passant par M ; elle coupe [DO] en N. Calculer la valeur exacte de MN.

Solutions.

2a) $OH = 3\sqrt{3}$ cm

3) $MN = \sqrt{3}$ cm

Exercice 15. Formules de trigonométrie (Non exigibles) (c)

Théorème 1

Soit un triangle ABC rectangle en C . Alors

1.

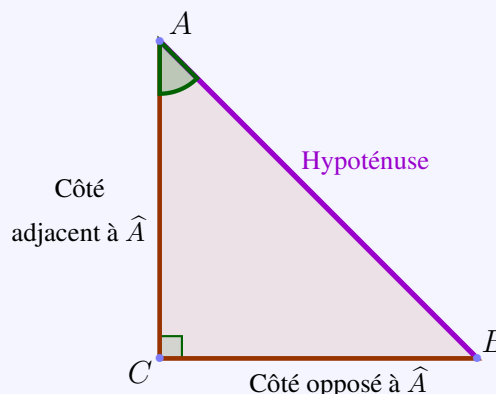
$$0 \leq \cos \hat{A} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sin \hat{A} \leq 1$$

2.

$$(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$$

3.

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$



1. Démontrer les propriétés du théorème ci-dessus.

2. Applications :

2. a. Sachant que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\sin(60^\circ)$ et de $\tan(60^\circ)$.

2. b. Sachant que $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\cos(30^\circ)$ et de $\tan(30^\circ)$.

Exercice 16. PPF ** Les angles remarquables

1. En vous plaçant dans un triangle équilatéral (de côté 1 ou a), démontrer que :

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$



Aide

> Pensez à tracer une hauteur ...

2. Considérez maintenant un triangle rectangle dont un des angle mesure 60° .

En déduire avec la question précédente que :

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

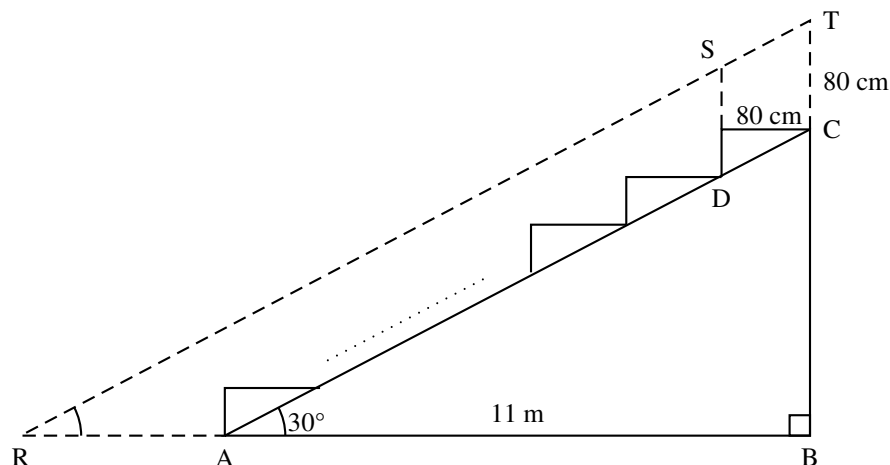
3. En vous plaçant dans un triangle rectangle et isocèle, démontrer que :

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \tan(45^\circ) = 1$$

↩ **Fin du TD** ↪

Partie III. Corrections partie 1

Correction de l'exercice 1 : Polynésie Septembre 2017



1. **Montrer que la hauteur BC de la tribune mesure 6,35 m, arrondie au centième de mètre près.**
 Dans le triangle ABC rectangle en B on a :

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$$

soit

$$BC = AB \times \tan \widehat{BAC} \approx 11 \times 0,577 \approx 6,350$$

Donc $BC \approx 6,35$ m.

2. **Quelle est la mesure de l'angle BRT ?**

Les droites (RT) et (AC) étant parallèles, les angles correspondants \widehat{BAC} et \widehat{BRT} ont la même mesure 30° .

3. **Calculer la longueur RA en centimètres. Arrondir le résultat au centimètre près.**

Dans le triangle BRT rectangle en B, on a :

$$\tan \widehat{BRT} = \frac{BT}{BR}$$

Or

$$BT = BC + CT \approx 6,35 + 0,80 = 7,15 \text{ m}$$

Donc

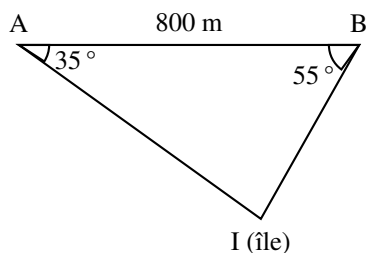
$$BR = \frac{BT}{\tan \widehat{BRT}} \approx \frac{7,15}{0,577} \approx 12,38 \text{ m}$$

Finalement

$$AR = BR - AB \approx 12,38 - 11 \approx \underline{1,38 \text{ m}}$$

Correction de l'exercice 2 page 2

Deux bateaux sont au large d'une île et souhaitent la rejoindre pour y passer la nuit. On peut schématiser leurs positions A et B comme indiquées ci-contre. Ils constatent qu'ils sont séparés de 800 m, et chacun voit l'île sous un angle différent. Déterminer, au m près, la distance qui sépare chaque bateau de l'île.



Correction

Dans un triangle, la somme des mesures d'angles fait 180° donc :

$$\widehat{AIB} = 180 - (55 + 35) = 180 - 90 = 90^\circ$$

Le triangle AIB est donc rectangle en I.

On a donc

$$\cos \widehat{BAI} = \frac{AI}{AB}$$

Soit

$$AI = AB \cos \widehat{BAI} = 800 \cos 35 \approx \underline{655,3 \text{ m}}$$

De même

$$\cos \widehat{ABI} = \frac{BI}{AB}$$

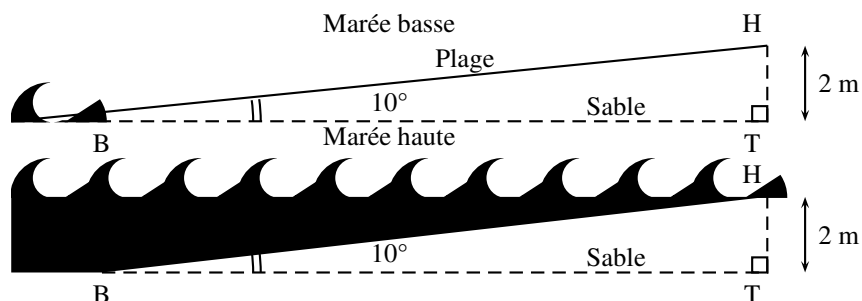
Soit

$$BI = BA \cos \widehat{ABI} = 800 \cos 55 \approx \underline{458,8 \text{ m}}$$

Correction de l'exercice 3 page 2

Le niveau de la mer monte et descend suivant le cycle des marées. Les deux schémas ci-dessous représentent la même plage parfaitement lisse, à deux instants de la journée.

On a : $HT = 2$ m, $HBT = 10^\circ$ et $(HT) \perp (BT)$.



1. Calculer la longueur BH, en mètres, de plage recouverte par la mer à marée haute. Donner l'arrondi au dixième près.



Correction

Dans le triangle BHT rectangle en T, on a

$$\tan \widehat{TBH} = \frac{HT}{BT}$$

soit

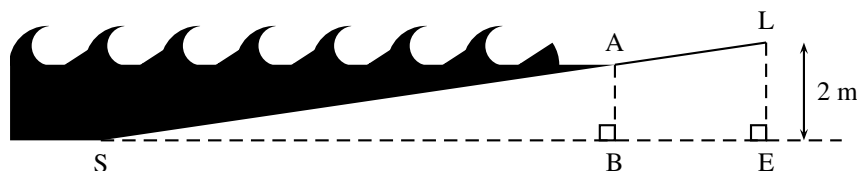
$$BT = \frac{HT}{\tan \widehat{TBH}} = \frac{2}{\tan 10^\circ} \approx 11,34 \text{ m}$$

soit environ 11,3 m au dixième près.

2. Sur une autre plage de pente différente (mais toujours parfaitement lisse), la mer a recouvert la plage jusqu'au point L. Deux heures plus tard, la mer s'est retirée et se situe désormais au point A.

Sur le schéma, les points S, B et E sont alignés. Ils correspondent au niveau horizontal.

On a : $SL = 9$ m ; $AL = 2,25$ m ; $(AB) \perp (SE)$; $(LE) \perp (SE)$.



Démontrer que les droites (AB) et (LE) sont parallèles.



Correction

| Les droites (AB) et (LE) sont parallèles car perpendiculaires à (SE).

Calculer la longueur AB, en mètres, du niveau vertical actuel de la mer.



Correction

Les points S, A, L d'une part, S, B, E de l'autre sont alignés dans cet ordre. Les droites (AB) et (LE) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{LE} = \frac{SA}{SL}$$

soit

$$AB = \frac{SA \times LE}{SL}$$

Or $SA = SL - SL = 9 - 2,25 = 6,75$ m.

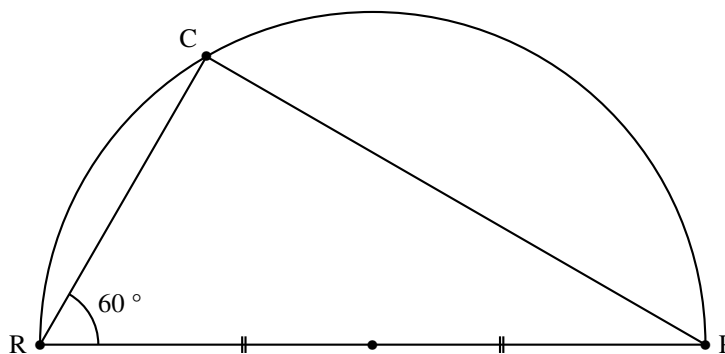
Donc

$$AB = \frac{6,75 \times 2}{9} = \frac{13,5}{9} = \frac{9 \times 1,5}{9} = \underline{1,5 \text{ m}}$$

Correction de l'exercice 4 page 3

Voici une carte découverte par Ruffy qui lui permettra de déterrer le fabuleux trésor de Math le Pirate. On note :

- R le roche en forme de crâne, C le cocotier sous lequel est enterré le trésor
- P le phare et C est sur le demi-cercle de diamètre [PR]



La distance du phare au rocher en forme de crâne est de 3 000 brasses.

Aidez-le à mettre la main sur le butin :

1. Démontrer que le triangle PRC est un triangle rectangle.



Correction

Le triangle PRC est inscrit dans un demi-cercle qui admet pour diamètre l'un de ses côtés : il est donc rectangle en C, d'hypoténuse [RP].

2. Calculer la distance RC en brasses.



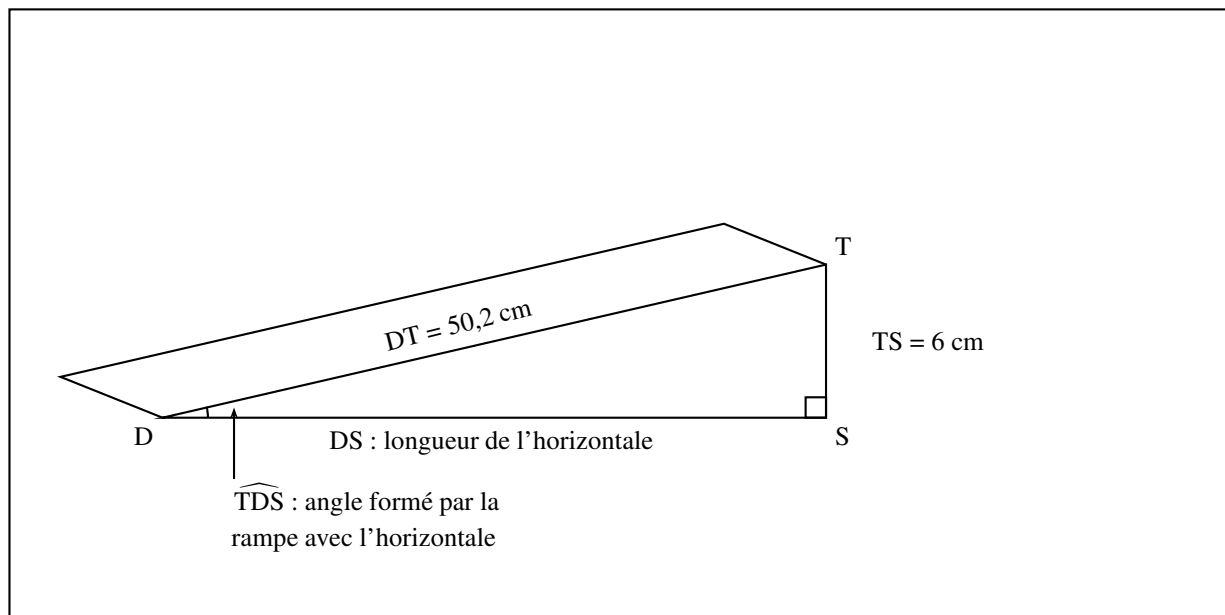
Correction

Le triangle PRC est un triangle rectangle en C, donc on a :

$$RC = RP \cos \widehat{PRC} = 3\,000 \cos 60 = 3\,000 \times \frac{1}{2} = \underline{1\,500 \text{ brasses}}$$

Correction de l'exercice 6 : Une rampe - Métropole Septembre 2015

La norme impose que la rampe d'accès forme un angle inférieur à 3° avec l'horizontale sauf dans certains cas. Cas particuliers : L'angle formé par la rampe avec l'horizontale peut aller : - jusqu'à 5° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 2 m, et jusqu'à 7° si la longueur de l'horizontale est inférieure à 0,5 m.

**Correction**

- Calcul de l'horizontale DS.

Dans le triangle SDT rectangle en S , d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} DT^2 &= SD^2 + ST^2 \\ 50,2^2 &= SD^2 + 6^2 \\ SD^2 &= 50,2^2 - 6^2 \\ SD^2 &= 2520,04 - 36 \\ SD^2 &= 2484,04 \end{aligned}$$

Or SD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned} SD &= \sqrt{2484,04} \\ SD &= \underline{49,84 \text{ cm}} \end{aligned}$$

La distance étant inférieure à $0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$, l'angle peut aller jusqu'à 7° .

- Calcul de l'angle \widehat{TDS} .

Dans le triangle rectangle TDS , on a :

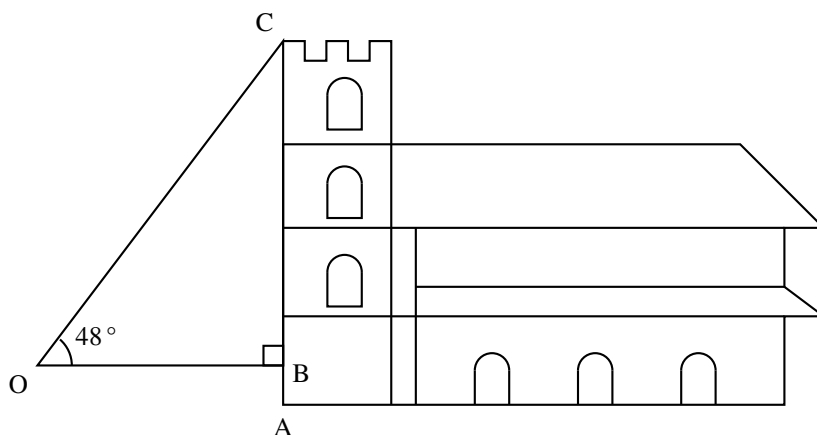
$$\sin \widehat{TDS} = \frac{DS}{DT} = \frac{6}{50,2}$$

La calculatrice donne :

$$\widehat{TDS} = \arcsin\left(\frac{6}{50,2}\right) \approx 6,86^\circ < 7^\circ$$

- Conclusion : la rampe est conforme à la norme puisque l'angle \widehat{TDS} est inférieur à 7° avec une longueur de l'horizontale inférieure à 0,5 m.

Correction de l'exercice 7 : La cathédrale - Brevet des collèges Nouvelle-Calédonie, décembre 2010



Correction

Dans le triangle OBC rectangle en B, on a

$$\tan \widehat{BOC} = \frac{CB}{OB}$$

d'où

$$CB = OB \times \tan \widehat{BOC} \approx 16,659 \text{ m}$$

Puisque le point B appartient au segment [AC] on a :

$$AC = AB + BC = 1,8 + BC \approx 18,459$$

La hauteur de la cathédrale est donc : 18,5 m au décimètre près.

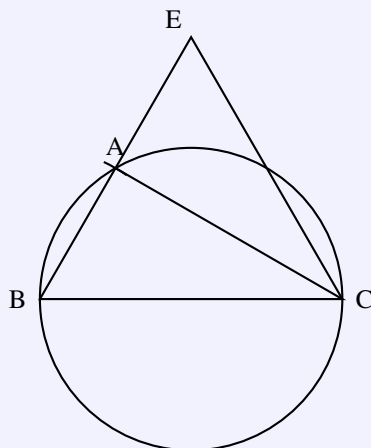
Correction de l'exercice 8

On considère un cercle de centre O et de diamètre [BC] tel que BC = 8 cm.
On place sur ce cercle un point A tel que BA = 4 cm.

1. Faire une figure en vraie grandeur.



Correction



2.

2. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.



Correction

| ABC est inscrit dans un cercle dont l'un de ses côtés [BC] est un diamètre donc ABC est rectangle en A.

2. b. Calculer la valeur exacte de la longueur AC. Donner la valeur arrondie de AC au millimètre près,



Correction

Dans le triangle ACB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

$$8^2 = AC^2 + 4^2$$

$$AC^2 = 8^2 - 4^2$$

$$AC^2 = 64 - 16$$

$$AC^2 = 48$$

Or AC est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$AC = \sqrt{48}$$

$$AC \approx \underline{6,9 \text{ cm}}$$

2. c. Déterminer la mesure de l'angle \widehat{ABC} .



Correction

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

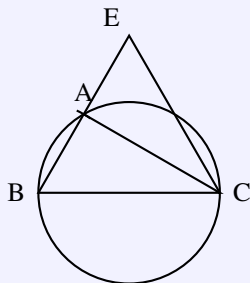
On a donc

$$\widehat{ABC} = \arccos(0,5) = 60^\circ$$

3. On construit le point E symétrique du point B par rapport au point A. Quelle est la nature du triangle BEC ? Justifier.



Correction



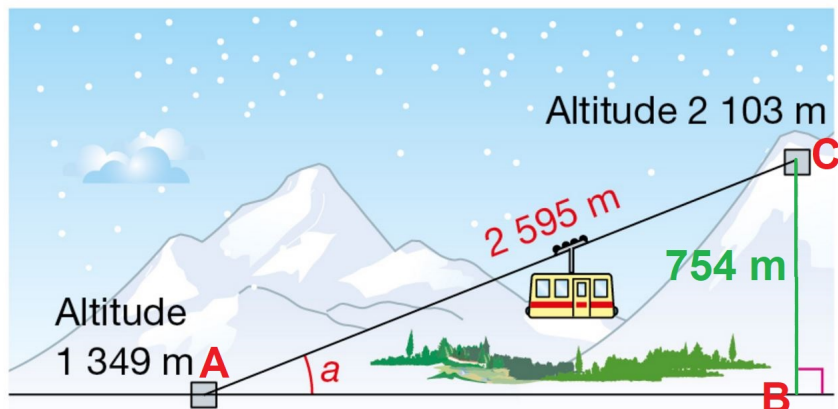
Par définition de la symétrie, A est le milieu de [BE] donc $BE = 2BA = 2 \times 4 = 8$.

Le triangle EBC est donc isocèle ($BC = BE = 8$) et d'angle au sommet de mesure 60° . Les deux autres angles sont égaux et ont pour mesure :

$$\frac{180 - 60}{2} = 60^\circ.$$

Les trois angles du triangle ont la même mesure, le triangle BEC est donc équilatéral.

Correction de l'exercice 9 : a cable car



Donner une valeur approchée au degré près de l'angle formé par le câble et l'horizontal.



Correction

Il convient dans cet exercice de nommer les points de la figure.

Dans le triangle ABC rectangle en B on a :

$$BC = 2103 - 1349 = 754 \text{ m}$$

Et de ce fait :

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{754}{2595}$$

Soit

$$\widehat{BAC} = \arcsin\left(\frac{754}{2595}\right) \approx 17^\circ$$

Partie IV. Corrections partie 2

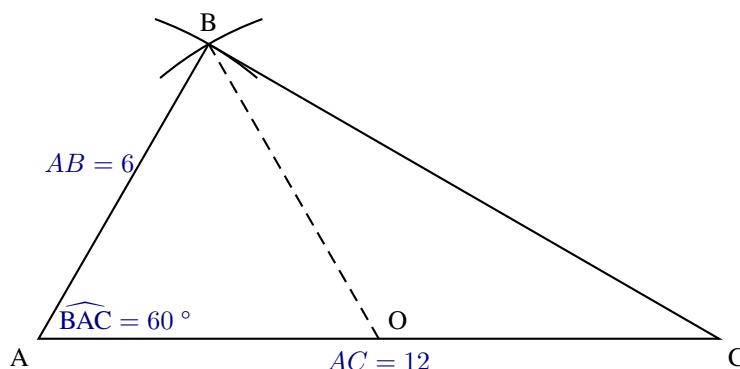
Correction de l'exercice 11 - Al-Kashi : Polynésie Septembre 2010

La formule d'Al-Kashi permet de calculer le troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et un angle. Pour un triangle ABC, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$.

On considère pour tout l'exercice que : $AB = 6$ cm, $AC = 12$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

1. Construire un triangle ABC vérifiant les conditions précédentes.

On construit un triangle ABO équilatéral de côté 6, puis C sur la droite (AO) tel que $AC = 2AO$.



2. Une question avec 3 sous-questions :

- Donner la valeur de $\cos(\widehat{BAC})$.

On a puisque $\widehat{BAC} = 60^\circ$:

$$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

- En déduire avec la formule d'Al-Kashi que l'on a $BC^2 = AC^2 + AB^2 - AC \times AB$.

La formule d'Al-Kashi s'écrit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC})$$

ou encore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \times \frac{1}{2}$$

soit finalement

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - AC \times AB}$$

- Montrer que $BC = \sqrt{108}$ cm.

On a donc

$$BC^2 = 6^2 + 12^2 - 12 \times 6 = 36 + 144 - 72 = 108$$

Donc $BC = \sqrt{108}$ cm.

3. En déduire que le triangle ABC est rectangle en B.

On a d'une part

$$AC^2 = 12^2 = 144$$

Et d'autre part :

$$AB^2 + BC^2 = 6^2 + 108 = 36 + 108 = 144$$

On a donc :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

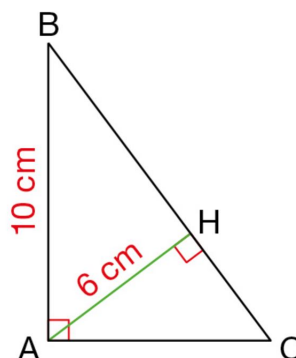
Ce qui signifie par réciproque du théorème de Pythagore que le triangle ABC est rectangle en B.

Correction de l'exercice 12 : Bien choisir son triangle

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A.

a. Calculer $\sin \widehat{ABC}$.

b. En déduire une valeur approchée au dixième près de la longueur BC, en cm.



Correction

1. Dans le triangle ABH rectangle en H on a :

$$\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{10}$$

Soit puisque $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$:

$$\sin \widehat{ABC} = 0,6$$

2.

2. a. Calculons BH.

Dans le triangle HBA rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$BA^2 = HB^2 + HA^2$$

$$10^2 = HB^2 + 6^2$$

$$HB^2 = 10^2 - 6^2$$

$$HB^2 = 100 - 36$$

$$HB^2 = 64$$

Or HB est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$HB = \sqrt{64}$$

$$HB = \underline{8 \text{ cm}}$$

2. b. Calculons BC.

On se place dans le triangle ABH rectangle en H.

$$\cos \widehat{ABH} = \frac{AB}{BH} = 0,8$$

Soit puisque $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$:

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{8}{10}$$

On se place dans le triangle ABC rectangle en A.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

Soit

$$\frac{8}{10} = \frac{10}{BC}$$

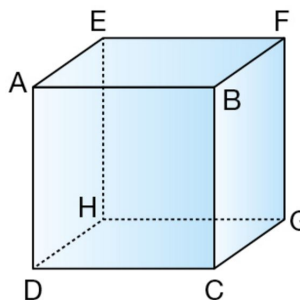
et donc

$$BC = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ m}$$

Correction de l'exercice 13 : Dans l'espace

ABCDEFGH est un cube d'arête 5 cm.

Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et AG, puis une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle \widehat{CAG} .



Correction

1. Calcul de AC.

Le triangle ADC est rectangle en D . L'hypoténuse est donc le côté $[AC]$.

Donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 5^2$$

$$AC^2 = 50$$

Donc la valeur exacte de AC est :

$$AC = \sqrt{50} \text{ cm}$$

2. Calcul de AG.

Le triangle ACG est rectangle en C . L'hypoténuse est donc le côté $[AG]$.

Donc d'après le *théorème de Pythagore* :

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$AG^2 = 50 + 5^2$$

$$AG^2 = 75$$

Donc la valeur exacte de AG est :

$$AG = \sqrt{75} \text{ cm}$$

3. Calcul de \widehat{CAG} .

Le triangle ACG est rectangle en C . L'hypoténuse est donc le côté $[AG]$ et :

$$\cos \widehat{CAG} = \frac{AC}{AG} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}}$$

Donc

$$\widehat{CAG} = \arccos \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}} \right) \approx 35^\circ$$

Correction de l'exercice 14 : PPF * - Brevet des collèges, 2008

L'unité de longueur est le centimètre.

1. Construire un triangle DOS tel que $DS = DO = 6$ et $\widehat{ODS} = 120^\circ$.

Quelle est la nature du triangle DOS ? Justifier.

Correction

Le triangle DSO est isocèle en D.
 Dans un triangle, la somme des angles mesure 180° soit dans DOS :

$$180^\circ = 120^\circ + \widehat{DOS} + \widehat{DSO}$$

Dans le triangle DOS isocèle en O, les angles à la base sont de même mesure donc on a :

$$\widehat{DOS} = \widehat{DSO} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

2. Dans le triangle DOS, tracer la hauteur issue de D. Elle coupe [OS] en H.

On donne le tableau suivant :

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2. a. Calculer la valeur exacte de OH.

Correction

Dans DOH rectangle en H on a :

$$\cos \widehat{HOD} = \frac{OH}{OD} \iff \cos(30^\circ) = \frac{OH}{6}$$

Soit

$$OH = 6 \times \cos(30^\circ) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

2. b. En déduire que $OS = 6\sqrt{3}$.



Correction

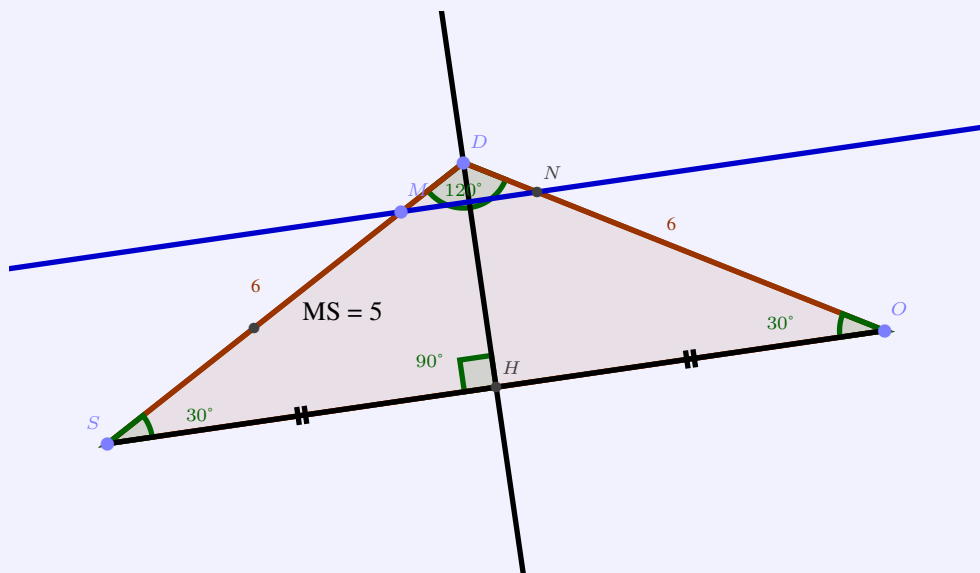
Puisque le triangle DOS est isocèle en D, la hauteur issue de D est aussi la médiane issue de D et donc :

$$OS = 2 \times OH = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

3. Placer le point M de [DS] tel que $SM = 5$. Tracer la parallèle à (OS) passant par M; elle coupe [DO] en N. Calculer la valeur exacte de MN.



Correction



• **Données**

- Les points D,M,N et D,N,O sont alignés sur deux droites sécantes en D;
- Les droites (MN) et (SO) sont parallèles.

• **Le théorème**

Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{DM}{DS} = \frac{DN}{DO} = \frac{MN}{SO}$$

Puis en remplaçant par les valeurs avec $DN = DS - MS = 1$ puisque M appartient au segment [DS] :

$$\frac{1}{6} = \frac{DN}{6} = \frac{MN}{6\sqrt{3}}$$

Soit

$$\frac{MN}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \iff MN = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Correction de l'exercice 15 : Formules de trigonométrie (Non exigibles)

Théorème 2

Soit un triangle ABC rectangle en C . Alors

1.

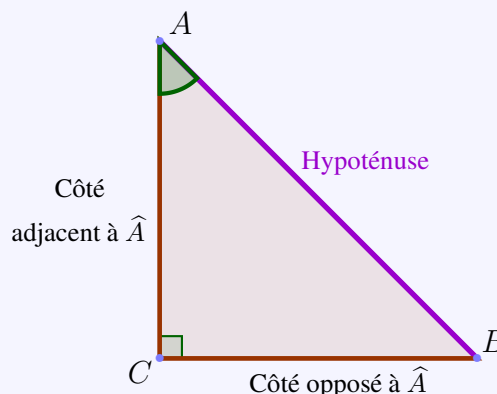
$$0 \leq \cos \hat{A} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sin \hat{A} \leq 1$$

2.

$$(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$$

3.

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$



1. Démontrer les propriétés du théorème ci-dessus.



Correction

1. a. D'après la définition donnée, le cosinus d'un angle est obtenu en divisant le côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse qui est le plus grand côté du triangle rectangle, de ce fait :

$$0 \leq \cos \hat{A} \leq 1$$

Et de même le sinus d'un angle est obtenu en divisant le côté opposé à cet angle par l'hypoténuse qui est le plus grand côté du triangle rectangle, de ce fait :

$$0 \leq \sin \hat{A} \leq 1$$

1. b. D'après les relations trigonométriques dans ABC rectangle en C :

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

On se place dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\begin{aligned} (\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 &= \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \\ &= \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} \end{aligned}$$

Or dans le triangle ABC rectangle en C , on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

De ce fait en remplaçant dans la relation précédente :

$$\begin{aligned} (\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 &= \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AB^2}{AB^2} = 1 \end{aligned}$$

On vient de démontrer que :

$$\boxed{(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1}$$

1. c. Dans le triangle ABC rectangle en C :

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC/AB}{AC/AB}$$

Or

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} \text{ et } \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

Donc

$$\boxed{\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}}$$

2. Applications :

2. a. Sachant que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\sin(60^\circ)$ et de $\tan(60^\circ)$.



Correction

On sait d'après la relation précédente que :

$$(\cos 60^\circ)^2 + (\sin 60^\circ)^2 = 1$$

Donc si $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ on a :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin 60^\circ)^2 = 1$$

soit

$$(\sin 60^\circ)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Et puisque le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, il est positif soit :

$$\sin 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Et d'après la 3e relation démontrée :

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \Rightarrow \boxed{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$

2. b. Sachant que $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\cos(30^\circ)$ et de $\tan(30^\circ)$.



Correction

On sait d'après la relation précédente que :

$$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1$$

Donc si $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ on a :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1$$

soit

$$(\cos 30^\circ)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Et puisque le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, il est positif soit :

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \implies \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Et d'après la 3e relation démontrée :

$$\tan \widehat{30^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \implies \boxed{\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$